

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS

Ecole Doctorale STIC
Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Informatique

le 16 juin 2000

par

Nausica MARLIN

Communications Structurées dans les Réseaux

Jury

Président	Jean-Marc FÉDOU
Rapporteurs	Denise AMAR Marie-Claude HEYDEMANN Shmuel ZAKS
Examineurs	Geña HAHN Daniel KOFMAN Stéphane PÉRENNES
Directeur	Jean-Claude BERMOND

ESSI, Amphi Est à 15h

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS

Ecole Doctorale STIC
Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Informatique

le 16 juin 2000

par

Nausica MARLIN

Communications Structurées dans les Réseaux

Jury

Président	Jean-Marc FÉDOU
Rapporteurs	Denise AMAR Marie-Claude HEYDEMANN Shmuel ZAKS
Examineurs	Geña HAHN Daniel KOFMAN Stéphane PÉRENNES
Directeur	Jean-Claude BERMOND

ESSI, Amphi Est à 15h

À mes maîtres vénérés,

À Mariotte,
qui s'en fout royalement.

Biliou !

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à *Jean-Claude Bermond* qui, bien que sans cesse occupé par mille affaires, sait trouver le temps de nous aider et de nous guider vers la meilleure voie. Tous les thésards qui ont travaillé avec lui sont unanimes, Jean-Claude est un admirable directeur de thèse.

Jean-Marc Fedou, merci de m'offrir le plaisir de te voir présider mon jury, c'est un grand honneur et une immense joie de te présenter mon travail.

Denise Amar, je te remercie d'avoir trouvé le courage et la patience de lire avec une si grande attention mon travail ; merci aussi de faire partie de mon jury.

Marie-Claude Heydemann, l'évocation de ton nom me rappelle des instants précieux, notre rencontre à Montréal, notre travail de toute une année, nos entrevues à Paris, Orsay, le plaisir de partager l'amitié et le travail. Merci Marie-Claude d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse, merci d'être près de moi aujourd'hui.

Shmuel Zaks, I would like to thank you very much for the help and comments on my thesis. I am really happy to know you a little better and I hope we will meet in the near future.

Daniel Kofman, je te remercie d'avoir trouvé un moment dans ton emploi du temps surréaliste pour venir m'écouter à Nice.

Geňa Hahn, merci d'avoir fait un détour par ici entre la grande fête de Prague et le retour au dur labeur de Montréal.

Stéphane Pérennes, merci d'avoir passé du temps avec moi à prouver, à comprendre, à m'expliquer, à me corriger. Sans toi, cette thèse n'existerait pas. C'est vrai que tu as un sale caractère et que tu n'acceptes jamais d'avoir tort mais tu vois loin, très loin et très juste, c'est un plaisir de te côtoyer.

Merci à *Patricia Lachaume*, *Zohra Kalafi* et *Ephie Deriche* pour leur soutien quotidien lors des parcours administratifs.

Un salut amical à tous ceux avec lesquels j'ai eu l'occasion de travailler durant ces quatre années. *Andrejz Pelc* and *David Peleg*, thank you for the pleasure you gave me while working together. *Alexandre Laugier* et *Pascal Chanas* de France Télécom, merci de nous avoir proposé et expliqué le problème du VPL. *Pavol Hell*, merci de m'avoir appris à travailler au tableau lors de mon stage de DEA, de m'avoir écoutée et aidée. Tes passages à Nice me font toujours chaud au cœur. *Amotz Bar-Noy*, thank you for your kindness, your smile and also for your help and your encouragement. *Dominique Sotteau*, merci pour ton accueil chaleureux au sein de Rumeur et ta gentillesse. *Claudine Peyrat*, merci de ton intérêt lors de nos échanges scientifiques de la première année. Ils me laissent un souvenir très agréable qui, je l'espère, redeviendra réalité un jour. *Cyril Gavoille*, tu m'as appris à sauter plus loin tu te rappelles? Je ne me ferai plus jamais manger par les crocodiles en traversant la rivière. Que tes intervalles te valent le ciel! *Tamar Eilam*, it was a great pleasure to meet you and to correspond with you.

Et une pensée toute particulière pour ceux qui, au fil de ces années, sont devenus de véritables amis. *Christine Garcia*, merci pour ton amitié et ton soutien, et aussi pour tes encouragements. J'espère que nous restons encore longtemps tout près l'une de l'autre. *Bruno Beauquier*, merci pour ta confiance, ton attention et toutes tes gentilleses. Je suis heureuse de t'avoir rencontré et plus heureuse encore lorsque tu souris.

À mes potes de l'ex-projet Sloop, j'envoie un salut fraternel. Un petit bisou particulier pour *Eric*, ma moitié tant aimée en L039, pour mon *Dirty* chéri et un gros câlin pour le *Sysk'*. Un gros bisou à ceux de l'INRIA, *Cyril Godart* et *Claude Martini*, mes grands copains de l'Atlas magique, *Sandrine Boute*, que je pense fort à elle et que je veux plus qu'il lui arrive de malheurs et aussi *Thierry Vieville* que je salue respectueusement en m'inclinant humblement à terre.

D'autres personnes, plus intimes, ont apporté du bonheur et des larmes durant ces dernières années, je veux les saluer ici et leur témoigner mon amitié sincère.

Véro, je voulais te dire merci d'avoir aidé Mariotte à atterrir en sécurité et aussi d'avoir été si gentille, si souriante et si tendre lorsque j'étais inquiète.

Michèle, Alain, Ivan et *Richard*, merci de tout mon cœur pour votre accueil chaleureux ; grâce à vous, le soleil a brillé plus fort pendant ces trois mois d'été où la jolie fleur finissait de se préparer, où la jolie fleur ouvrait les yeux sur ce monde nouveau.

Mes amis de longue date, laissez-moi profiter ici de cet espace de liberté pour vous témoigner ma profonde affection. *Sébastien*, je te souhaite toute les réussites possibles et utopiques dans ton projet fantastique. *Fabrice*, je te souhaite de diriger un jour le chantier de rénovation d'une superbe église romane, j'espère que tu trouveras ta voie dans ce monde étrange, je t'embrasse tendrement. *Bruno*, on part faire le tour du monde en bateau ? C'est quand tu veux ! *Edwige chérie*, sois toujours aussi belle et aussi gaie qu'aujourd'hui, emmène moi encore souvent dans ton pays de rêve, j'aime tellement être en ta compagnie. *Ma p'tite Nath*, reviendras-tu un jour de tes longs voyages ? Tu es loin mais je pense à toi souvent, à nos rires, à nos peurs. *Lissita jolie*, je voulais te dire que le souvenir de nos jeux aquatiques est impérissable et que, j'en suis sûre, nous retrouverons un jour l'occasion d'apprendre à chasser la murène ensemble. Un gros bisou pour *Anne* et encore un grand paquet de souvenirs émus pour *Sophie, Arnaud*, et aussi mes tendres amies *Eva et Evelyne, Caroline et Catherine*. Une grosse caresse à *Item-le-chien* et un coucou ensoleillé à la copine *Graziella*. Salamalekoum affectueux pour *Aoitif* et *Jean-Jacques* et aussi pour *Zohra*, la petite berbère de mon cœur. Beaucoup de bonheur à *Karine* et *Olivier*. Longue vie à la petite *Salomé* et bisous forts à ses parents.

Pour vous, *Colette, Roger, Mélissa*, une rivière de sourires, des années de câlins.

Et pour toi, mon amour, la plus belle étoile du ciel.

Table des matières

Introduction	1
1 Réseaux d'interconnexion, mécanismes de communication et modélisation	9
1.1 Réseaux et Graphes	9
1.1.1 Notions élémentaires de théorie des graphes	9
1.1.2 Réseaux usuels	12
1.2 Communications structurées	14
1.2.1 Contraintes de communications	14
1.2.2 Schémas de communication	15
 I Topologie logique pour les réseaux de télécommunications	 19
2 La technologie ATM	21
2.1 Les modes de transfert classiques	21
2.1.1 Commutation de circuits (<i>circuit-switching</i>)	22
2.1.2 Commutation de messages (<i>store-and-forward</i>)	22
2.1.3 Leur évolution récente	23
2.2 Le mode de Transfert asynchrone	24
2.2.1 Les cellules ATM	24
2.2.2 Les connexions ATM	25
2.3 Modèle : première approche	27
2.3.1 Première Modélisation	28
2.3.2 Topologie virtuelle	29
 3 Modèle et Résultats	 33
3.1 Définitions et Notations	33
3.1.1 Les requêtes	33
3.1.2 VPL ou Positionnement des chemins virtuels	34
3.1.3 Les contraintes : capacité et nombre de sauts	35
3.1.4 Les objectifs : charge et distance maximale d'un VPL	35
3.1.5 La classe $VPL(G, I, h, c)$	36

3.2	Modèles orienté et non orienté	36
3.3	Formulation du Problème et Complexité	37
3.3.1	Les problèmes	37
3.3.2	Complexité du Problème	38
3.4	Arête et arc-indice de transmission	39
3.4.1	Définitions	39
3.4.2	L'indice de transmission des graphes usuels	40
3.4.3	Approximation de l'indice de transmission	40
3.5	Bornes Générales	42
3.5.1	Relations entre les paramètres	42
3.5.2	Premières bornes	45
3.6	Réseaux particuliers	48
3.6.1	Le chemin	48
3.6.2	Le chemin orienté	52
3.6.3	Le cycle	53
3.6.4	Le circuit (ou cycle orienté)	53
3.6.5	Les arbres k -aires complets orientés ou non	54
3.6.6	Les arbres	54
3.6.7	Les arbres orientés	55
3.6.8	La grille et le tore	56
3.6.9	La grille et le tore orientés	57
3.7	D'autres contraintes sur le VPL	58
3.7.1	VPL avec facteur d'étirement fixé	58
3.7.2	VPL avec charge sur les sommets minimale	60
4	Positionnement des Chemins Virtuels	67
4.1	Le problème du flot entier	68
4.2	Bornes sur la charge	69
4.2.1	Borne Inférieure	69
4.2.2	Borne Supérieure, One-to-Many	70
4.2.3	Bornes Supérieures, All-to-All	76
4.3	Diamètre virtuel en fonction de l'arc-connexité	80
4.3.1	Cas général	81
4.3.2	Cas particulier $\lambda = 2, c = 1$	82
4.4	Diamètre virtuel du chemin orienté, capacité 1	83
4.4.1	Exemple	84
4.4.2	Borne Inférieure	85
4.4.3	Borne Supérieure	91
5	Directed Virtual Path Layout in ATM Networks	99
5.1	Introduction	100
5.2	Model	103
5.3	Cycles C_n	104

5.3.1	General Case	104
5.3.2	Case $c = 1$	107
5.4	Paths P_n	110
5.5	Complete Symmetric k-ary Trees $T(k, h)$	111
5.6	Arbitrary Trees	114
5.7	Toroidal Meshes and Meshes	119
5.7.1	Toroidal Meshes	119
5.7.2	Meshes	120
5.8	General Bounds	122
5.9	Open problems and directions	125

II Rotations complètes dans les graphes de Cayley 131

6 Les graphes de Cayley 133

6.1	Des groupes	133
6.1.1	Permutations	134
6.1.2	Groupes	135
6.1.3	Actions de groupes	135
6.1.4	Produit semi-direct	136
6.2	Graphes de Cayley	136
6.2.1	Définition	136
6.2.2	Exemples	137
6.2.3	Transitivité	138
6.3	Protocole d'échange total	139
6.3.1	Construction	141
6.3.2	Exemples	143
6.3.3	Un autre type de rotation	144
6.4	Le problème	145
6.4.1	Quels graphes?	145
6.4.2	Conditions pour l'existence d'une rotation complète	145

7 Cayley Graphs with Complete Rotations 149

7.1	Introduction	150
7.2	Preliminaries	151
7.2.1	Cayley graphs	151
7.2.2	S-stabilizers and rotations	152
7.2.3	Definitions of complete rotations	153
7.2.4	Rotational graphs	156
7.3	Study of conditions for the existence of a rotation	158
7.3.1	A characterization of rotations	158
7.3.2	Abelian groups	161

7.3.3	Rotation-translation group	162
7.3.4	Complete rotations on Cartesian products	165
7.4	Cayley graphs defined by transpositions	167
7.4.1	Transposition graph	167
7.4.2	Rotations of Cayley graphs generated by transpositions . . .	169
7.4.3	Generalized star graphs	172
7.4.4	Characterization of rotational Cayley graphs defined by transpositions	173
7.5	Conclusion	175
7.6	Annex: Definitions of some Cayley graphs	176
7.6.1	Cycle	176
7.6.2	Multidimensional torus	176
7.6.3	Hypercube	176
7.6.4	Star graph	178
7.6.5	Generalized star graph	179
7.6.6	Modified bubble sort graph	179
7.7	Annex: Notation	181

Conclusion et Perspectives	187
-----------------------------------	------------

Table des figures

1.1	Le cycle C_6 et le graphe complet K_6 .	12
1.2	L'hypercube H_4 .	13
1.3	La grille $M(5,4)$ et le tore $TM(5,4)$.	13
2.1	La commutation de circuits	23
2.2	La cellule ATM	25
2.3	Le multiplexage temporel ATM	25
2.4	Division de la capacité d'un lien de transmission physique	26
2.5	Connexions ATM: VPC et VCC	27
2.6	Un réseau ATM imaginaire	29
2.7	Le réseau virtuel et son plongement dans le réseau physique	29
3.1	La boule de rayon 2 en dimension 2	50
3.2	[DFZ97] Établissement de la récurrence sur la taille optimale des arbres	50
3.3	Complexité du problème D avec facteur d'étirement 1 en one-to-all	59
3.4	[GWZ95] Établissement de la récurrence avec facteur d'étirement 1	60
3.5	[FNP97] Résultats sur le nombre maximum de sommets	62
4.1	Transformations A et B	71
4.2	Le cycle orienté unidirectionnel \vec{C}_6	83
4.3	Construction sur le chemin	84
4.4	Une chaîne de cycles	85
4.5	Forme A d'un VPL	87
4.6	Algorithme de Transformation d'une chaîne de forme A en une chaîne de forme B	89
4.7	Nombre maximum de sommets pour q pair	92
4.8	Nombre maximum de sommets pour q impair	93
4.9	Construction pour $k = 3$, cas pair	95
4.10	Construction pour $k = 2$, cas impair	95
5.1	Example of DVPL: the cycle, capacity 1	104
5.2	Collapsing a cycle	105
5.3	Cycle capacity 1	107
5.4	A circuit-bracelet	108

5.5	$P_n, c = 2$	111
5.6	$k = 2, c = 2$ or $3, \gamma = 2$, there exist no arcs from A to B; (on the right) $k = 2, \gamma = 2, h = 6$, one cannot do better than 5 from l_3 to r_3	112
5.7	Binary Tree, $c = 4, h = 6$	113
5.8	Case $c = 2, k = 2$	113
5.9	Step i of the algo	116
5.10	A step in the construction of the DVPL. case 1, $c^+ \geq c^-$	117
5.11	Tree Layout	118
5.12	Position of the strips	121
5.13	Composition of a strip	121
5.14	$M(10,13), A = 4, B = 3, C = 2$	121
5.15	How to move in a strip	122
6.1	Le star-graph $S(4)$ sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$	138
6.2	Le graphe de Petersen	139
6.3	Rotation dans le tore $TM(4)^2$	141
6.4	Construction de la diffusion par rotation dans le tore et le star-graph	143
7.1	Möbius graph	164
7.2	$H(4)$	177
7.3	Transposition graph for $H(4)$	177
7.4	Star graph $ST(4)$	178
7.5	Transposition graph for $ST(4)$	179
7.6	$GST(4,2) = MBS(4)$	180
7.7	Transposition graph for $GST(4,2)$ and $MBS(4)$	180

Introduction

Cette thèse a été réalisée au sein du projet SLOOP¹ et en collaboration avec France Télécom Recherche & Développement.

Nous y étudions deux problèmes liés aux **communications structurées dans les réseaux**.

Tout d'abord, nous rappelons dans le **chapitre 1** des notions générales de théorie des graphes. Nous y présentons la modélisation d'un réseau de communication par un graphe, des exemples de graphes communément utilisés pour modéliser les réseaux, et la modélisation des communications entre les nœuds. Le reste du manuscrit est divisé en deux parties.

La **première partie** concerne la commutation rapide des informations dans les réseaux ATM. De tels réseaux de télécommunications sont construits pour supporter des débits de transfert d'information très élevés. L'utilisation de la fibre optique dans les liens de communication permet à la transmission des données d'être suffisamment rapide pour atteindre le débit requis. En revanche, les conversions optoélectroniques sont très coûteuses en temps. À chaque fois qu'une information doit être traitée dans un commutateur électronique, elle est ralentie. Il s'agit donc de concevoir des réseaux et des protocoles qui minimisent le nombre de traitements effectués au niveau électronique sur les données qui circulent dans le réseau. La solution envisagée par les concepteurs de réseaux ATM est de positionner par dessus le réseau physique un second réseau, appelé réseau logique ou réseau virtuel, constitué de chemins dits virtuels le long desquels l'information circule rapidement, sans être retardée au passage des nœuds intermédiaires. Il convient alors de positionner correctement les chemins virtuels dans le réseau pour que le nombre de chemins virtuels empruntés par une connexion soit minimal, tout en respectant les contraintes de capacité sur le réseau physique.

Dans ce cadre, notre travail a consisté à étudier et adapter la modélisation de ce problème faite dans la littérature et à établir des relations entre le nombre de chemins virtuels traversés par les connexions et les contraintes physiques du réseau. Nous avons principalement considéré les instances de communication de

1. SLOOP est un projet commun CNRS / INRIA / UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS (LABORATOIRE I3S THÈME PACOM) rebaptisé projet MASCOTTE en avril 2000

type *diffusion* (où un initiateur souhaite échanger son information avec tous les autres utilisateurs du réseau) et de type *échange total* (où tous les utilisateurs veulent connaître les informations de tous les autres).

Pour résoudre ces problèmes, nous nous sommes placés dans un contexte d'optimisation algorithmique *déterministe* et *statique*. Nous supposons en effet que les données du réseau physique et de l'instance de communication sont fixées une fois pour toutes et nous cherchons à positionner les chemins virtuels en satisfaisant les contraintes et en optimisant divers paramètres. Nous avons pour cela utilisé des méthodes combinatoires et probabilistes.

Dans le **chapitre 2**, nous décrivons le cadre technique de notre travail. Il permet de cerner les contraintes technologiques qui nous ont amenés à la modélisation présentée dans le chapitre suivant. Nous commençons par rappeler le fonctionnement des modes de transfert *commutation de circuits* et *commutation de paquets* ; puis nous montrons pourquoi ils ne sont plus utilisables dans les réseaux de nouvelle génération et expliquons leur évolution récente. Nous détaillons alors les principes du mode de transfert le mieux adapté aux réseaux haut débit : l'ATM. Dans la dernière section de ce premier chapitre, nous proposons une première modélisation informelle pour résoudre le problème du positionnement des chemins virtuels dans les réseaux ATM et notons qu'elle n'est pas spécifique à ATM mais peut être utilisée pour d'autres réseaux de télécommunications. Cette modélisation a fait l'objet de la publication [1].

Dans le **chapitre 3**, nous commençons par modéliser formellement le problème étudié dans cette première partie. Nous définissons tout d'abord la notion de graphe virtuel muni d'un plongement dans le graphe physique pour représenter les chemins virtuels. Le couple formé par le graphe virtuel et le plongement est appelé *VPL* de l'anglais *Virtual Path Layout*. La charge d'un lien du graphe physique est le nombre de chemins virtuels qui traversent ce lien. La *charge du VPL* est le maximum de la charge d'un lien, c'est-à-dire la congestion du plongement. Étant donnée une instance de communication I (appelée aussi ensemble des *requêtes de connexion*) formée de couples de sommets du graphe physique (ou d'arêtes si le graphe est non orienté), on définit le *nombre de sauts du VPL* comme étant la distance maximale entre les deux sommets d'une requête de connexion dans le graphe virtuel. Ce paramètre correspond au nombre de chemins virtuels traversés par une connexion qui relierait ces deux sommets. Nous cherchons à construire des VPL qui minimisent les deux paramètres charge et nombre de sauts sous certaines contraintes. Comme ces deux paramètres sont en conflit, c'est-à-dire qu'on ne peut diminuer l'un qu'aux dépens de l'autre, nous cherchons soit à minimiser le nombre de sauts en imposant que la charge du VPL soit inférieure à une certaine fonction de capacité sur les liens physiques (supposée uniforme dans nos travaux), soit à minimiser la charge en imposant que le nombre de sauts soit inférieur à une certaine valeur h . Les bornes obtenues dans ces deux optimisations sont bien sûr

liées entre elles et nous étudions aussi ces relations.

Après la section 3.1 de définitions, nous discutons dans la section 3.2 de l'orientation ou de la non orientation du modèle. La version non orientée du problème est la plus étudiée dans la littérature. Pourtant, la version orientée trouve aussi sa justification dans la technologie actuelle. Il est donc intéressant de considérer les deux modèles.

Dans la section 3.3 nous formalisons le problème et donnons les résultats connus sur sa complexité.

La section 3.4 relie le paramètre arête (ou arc) indice de transmission π à notre problème. Un routage étant un ensemble de chemins reliant toutes les paires de sommets du graphe, π est, par définition, le minimum sur tous les routages du maximum de la charge d'une arête par les chemins du routage. Ce paramètre correspond à la charge optimale d'un VPL en un saut pour l'instance all-to-all. On peut le définir aussi pour les autres types d'instance comme étant la charge optimale d'un VPL en un saut pour l'instance considérée. Plus intéressant, on remarque que l'indice de transmission nous donne une borne inférieure sur la charge pour h sauts. En effet, si $\pi(h)$ désigne la charge minimale pour h sauts et Δ le degré du graphe physique, on a $2\Delta\pi(h) \geq (\Delta\pi)^{1/h}$. Cette borne donne une bonne approximation de $\pi(h)$ et nos recherches de bornes supérieures, c'est-à-dire de bonnes constructions de VPL, sont ainsi facilitées. Nous rappelons donc la définition de l'indice de transmission et les bornes classiques ainsi que sa valeur pour les graphes usuels.

Nous proposons ensuite dans les sections 3.5 et 3.6 une synthèse des résultats obtenus dans la littérature. On y trouve des relations simples entre les divers paramètres puis des bornes sur la charge optimale pour un nombre de sauts fixé ou sur le nombre de sauts pour une capacité limitée.

Ce chapitre se termine par un aperçu des autres problèmes de positionnement de chemins virtuels étudiés dans la littérature (section 3.7).

Dans le **chapitre 4**, nous exposons des démonstrations non encore publiées de bornes sur la charge et le nombre de sauts. Nous étudions d'abord dans la section 4.2 la relation $2\Delta\pi(h) \geq (\Delta\pi)^{1/h}$ et montrons que c'est une borne fine dans le cas d'une instance de type diffusion (sous-section 4.2.2). Nous considérons aussi le cas de l'instance d'échange total pour 2 sauts dans les arbres où cette borne est fine aussi (sous-section 4.2.3). Le cas d'un graphe général, pour 2 sauts, est enfin étudié avec une méthode probabiliste dans la sous-section 4.2.3. Certaines de ces bornes ont été annoncées sans démonstration dans [2].

Nous nous intéressons dans la section 4.3 aux bornes sur le nombre de sauts en reliant ce paramètre à l'arc-connexité. Connaissant l'arc-connexité du graphe

physique et sa capacité, nous donnons une construction s'inspirant d'une bonne construction dans l'arbre donnée au chapitre 5. Dans le cas particulier de l'arc-connexité 2, capacité 1, nous proposons une meilleure construction.

Enfin, la section 4.4 est consacrée au calcul précis du diamètre virtuel dans le cas du chemin orienté de capacité 1.

Le **chapitre 5** reprend l'article [3]. Après un rappel du modèle, nous donnons des bornes inférieures ainsi que des constructions optimales ou quasi-optimales sur le nombre de sauts en fonction de la capacité (fixée et uniforme) avec l'instance d'échange total (le nombre de sauts optimal s'appelle alors *diamètre virtuel*) dans le cycle, le chemin, l'arbre k -aire complet, les arbres quelconques, les tores, les grilles, ainsi que des bornes sur les graphes quelconques.

La **seconde partie** concerne l'échange total dans les réseaux d'interconnexion entre processeurs. Dans une machine parallèle à mémoire distribuée, l'exécution d'un programme se fait de manière répartie sur les différents processeurs. Ceux-ci effectuent des calculs d'une part, et s'échangent leurs résultats intermédiaires d'autre part. Nous nous intéressons à la phase d'échange, elle-même constituée de différentes phases synchrones appelées étapes de communication. Si on souhaite que chaque processeur connaisse les informations de tous les autres à la fin de la phase d'échange alors il convient de construire un protocole dit *d'échange total*. Les contraintes sur les liens de communication entre les processeurs ainsi que le mode de transfert des données utilisé limitent le temps nécessaire pour effectuer les échanges. Nous étudions le cas du mode *store and forward* et de la contrainte de communication F_* , où à chaque étape de communication chaque processeur peut échanger une information avec chacun de ses voisins. On trouve dans la littérature des protocoles d'échange total optimaux, dans ce modèle et dans différents types de réseaux, en particulier dans les graphes de Cayley.

Les graphes de Cayley sont souvent utilisés comme structure de base de réseaux de processeurs car ils sont très réguliers. Les protocoles de communication sont donc plus faciles à concevoir et à mettre en œuvre. Certains de ces graphes possèdent un automorphisme qui permet de construire très simplement un protocole d'échange total optimal. Notre travail a consisté à référencer les graphes de Cayley qui admettent un tel automorphisme. Pour cela, nous nous sommes principalement servis de méthodes algébriques utilisant la théorie des groupes.

Dans le **chapitre 6**, nous introduisons les notions de théorie des groupes nécessaires ainsi que la motivation du problème étudié dans le chapitre suivant.

Le **chapitre 7** reprend le rapport de recherche [4]. L'objet de cet article est de caractériser les graphes de Cayley admettant une rotation complète. Cet automorphisme de graphe permet en effet, lorsqu'il existe et sous certaines conditions sur l'orbite des sommets, de construire d'une manière simple un protocole d'échange to-

tal optimal. Après une première section pour définir cet automorphisme du graphe ainsi que l'automorphisme de groupe induit, nous mettons en évidence des conditions nécessaires sur le groupe pour que le graphe admette une rotation complète. Nous donnons la liste exhaustive des graphes de Cayley admettant une rotation complète parmi les graphes de Cayley engendrés par des transpositions. Il s'agit du bubble-sort graph modifié et des produits cartésiens de bubble-sort graphs modifiés isomorphes ; et du star graph généralisé $GST(t+q, q)$ avec t et q premiers entre eux et des produits cartésiens de tels graphes isomorphes. L'hypercube fait partie de cette famille. Plusieurs exemples de graphes de Cayley avec leur graphe de transposition sont présentés dans la section qui suit la conclusion de l'article.

Bibliographie

- [1] Jean-Claude Bermond, Nausica Marlin, David Peleg, and Stéphane Pérennes. Virtual path layout in simple ATM networks. In *Proceedings of 6th IFIP Workshop on Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks*, Ilkley UK, July 1998.
- [2] Jean-Claude Bermond, Nausica Marlin, David Peleg, and Stéphane Pérennes. Virtual path layouts with low congestion or low diameter in ATM networks. In *Proc. of 1ère Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications*, 1999.
- [3] Jean-Claude Bermond, Nausica Marlin, David Peleg, and Stéphane Pérennes. Directed virtual path layouts in ATM networks. *Theoretical Computer Science (TCS)*, 2000. Version étendue de l'article paru dans *Proc. of the 12th International Symposium on Distributed Computing (DISC'98)*, volume 1499 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 75-88, 1998.
- [4] Marie-Claude Heydemann, Nausica Marlin, and Stéphane Pérennes. Cayley graphs with complete rotations. *Rapport de Recherche L.R.I. Orsay 1155*, *Rapport de Recherche I3S Nice 9904*, *Rapport de Recherche INRIA 3624*, 1997. Fait l'objet de deux articles : version 1 soumise à *European Journal of Combinatorics*, version 2 sera présentée à *International Conference on Graph Theory* à Marseille en août 2000 et soumise au numéro spécial dans *Discrete Mathematics*.

Chapitre 1

Réseaux d'interconnexion, mécanismes de communication et modélisation

Nous présentons dans ce chapitre la modélisation théorique sur laquelle nos travaux ont pu progresser. Après un inventaire du vocabulaire de théorie des graphes utilisé au cours du mémoire, on trouve les premiers exemples de graphes parmi les plus simples. En section 1.2 vient la modélisation des communications dans les réseaux.

1.1 Réseaux et Graphes

Nous étudions dans ce mémoire la structure de certains réseaux d'interconnexion et les mécanismes de communication qu'ils utilisent. Il s'agit, dans la première partie de grands réseaux d'interconnexion entre machines (*Wide, Metropolitan, Local Area Networks: WAN, MAN ou LAN*) et dans la seconde partie, de réseaux de processeurs de machines parallèles à mémoire distribuée.

Les réseaux de télécommunications comme les réseaux de processeurs peuvent être modélisés par des graphes tels que nous les définissons formellement ci-dessous. Les sommets représentent les processeurs ou les nœuds du réseau de télécommunications qui sont des points d'accès ou des commutateurs. Les arcs représentent les liens physiques unidirectionnels et les arêtes les liens physiques bidirectionnels.

1.1.1 Notions élémentaires de théorie des graphes

Nous donnons seulement les définitions nécessaires par la suite. Le lecteur pourra trouver les notions non rappelées ici dans le livre de RUMEUR [dR94], dans les livres de théorie des graphes de Berge [Ber83], de Bondy et Murty [BM76] ou dans l'ouvrage de Leighton consacré au parallélisme [Lei92].

Définitions

- Un **graphe orienté** (*digraph*) $G = (V(G), A(G))$ est constitué d'un ensemble fini $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ d'éléments, appelés **sommets**, et d'une famille finie $A(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ de couples de sommets, appelés **arcs**.
- Notons qu'un couple de sommets $(x, y) \in V(G) \times V(G)$ peut être représenté plusieurs fois dans la famille $A(G)$; on parle alors d'**arc multiple** (x, y) et de **multigraphe** G .
- Un **graphe non orienté** $G = (V(G), E(G))$ est constitué d'un ensemble fini $V(G)$ de sommets et d'une famille finie $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de représentants de paires de sommets, appelées **arêtes**.
- Le nombre de sommets d'un (multi)graphe (orienté ou non) est appelé l'**ordre** du graphe, et est noté N .
- Si $a = (x, y)$ est un arc, alors x est son **extrémité initiale** et y son **extrémité finale**.
- Si $a = (x, y)$ est un arc, le sommet y est un **successeur** du sommet x et x est un **prédécesseur** de y . On s'autorise à dire également que y est **adjacent** à x .
- Si $e = [x, y]$ est une arête, les sommets x et y sont dits **adjacents** l'un à l'autre et l'arête e est dite **incidente** à x et y .
- Nous appellerons par la suite **liens** les arcs ou les arêtes d'un graphe, qu'il soit orienté ou non.
- Un graphe orienté est dit **symétrique** si l'existence d'un arc (x, y) implique l'existence de l'arc (y, x) .
- Un arc de la forme (x, x) ou une arête de la forme $[x, x]$ est appelé(e) **boucle**.
- Un graphe ne comportant ni boucle, ni arc ou arête multiple, est appelé **graphe simple**.
- On appelle **degré sortant** (resp. **entrant**) d'un sommet x dans un graphe orienté, noté $d^+(x)$ (resp. $d^-(x)$), le nombre d'arcs d'extrémité initiale (resp. finale) x .
- On appelle **degré** d'un sommet x dans un graphe, noté $d(x)$, le nombre d'arêtes incidentes à x .
- On appelle **degré maximum** (resp. **minimum**) d'un graphe, noté Δ (resp. δ), le maximum (resp. minimum) des degrés des sommets.
- On appelle **chemin** (*dipath*) dans un graphe orienté une suite $P = (a_1, a_2, \dots, a_q)$ d'arcs, telle que l'extrémité finale de a_i est l'extrémité

initiale de a_{i+1} , pour $1 \leq i < q$. La **longueur** du chemin P est alors le nombre d'arcs qui le composent.

- On peut également définir un chemin $P = (a_1, a_2, \dots, a_q)$ dans un graphe orienté simple par la suite des sommets (x_0, x_1, \dots, x_q) , telle que $a_i = (x_{i-1}, x_i)$. On dit alors que P est un chemin de x_0 vers x_q .
- On appelle **chaîne** (*path*) dans un graphe une suite $P = (e_1, e_2, \dots, e_q)$ d'arêtes, telle que deux arêtes consécutives sont incidentes à un même sommet. La **longueur** de la chaîne P est alors le nombre d'arêtes qui la composent.
On s'autorise par la suite à appeler une chaîne un chemin, la distinction dépendant de la nature du graphe considéré.
- Un chemin qui ne comporte pas deux fois le même lien est dit **simple**. Un chemin qui ne comporte pas deux fois le même sommet est dit **élémentaire**.
- On appelle **distance** entre deux sommets x et y dans un graphe (orienté ou non), notée $d(x, y)$, la longueur minimale d'un chemin de x vers y .
- On appelle **diamètre** d'un graphe (orienté ou non), noté D , le maximum des distances entre les sommets.
- On appelle **excentricité** d'un graphe par rapport à un sommet le maximum des distances à ce sommet.
- On appelle **circuit** dans un graphe orienté un chemin d'un sommet vers lui-même.
- On appelle **cycle** dans un graphe une chaîne d'un sommet vers lui-même.
- On appelle **stable** (*independent set* en anglais) d'un graphe un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.
- Un graphe orienté est dit **fortement connexe** s'il existe un chemin de tout sommet vers tout autre sommet.
- Un graphe est dit **connexe** s'il existe une chaîne entre toute paire de sommets.
- Un graphe est dit **biparti** s'il existe une partition de l'ensemble des sommets en deux parties non vides telles qu'il n'existe pas d'arête entre deux sommets appartenant à la même partie.

Constructions classiques

- La **somme cartésienne** (*cartesian product*) de deux graphes simples orientés $G = (V, A)$ et $G' = (V', A')$, notée $G \square G'$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets le produit cartésien $V \times V'$ et pour ensemble d'arcs les

couples $((x,x'),(y,y'))$ tels que $x = y$ et $(x',y') \in A'$ ou tels que $x' = y'$ et $(x,y) \in A$. La somme cartésienne de deux graphes non orientés se définit de manière analogue.

- Le **graphe représentatif des arcs** (*line-graph*) du graphe orienté G est le graphe orienté $L(G)$ dont les sommets représentent les arcs de G et dont les arcs sont définis comme suit : il existe un arc de e vers f dans $L(G)$ si l'arc de G représenté par e a pour extrémité terminale l'extrémité initiale de l'arc de G représenté par f .

1.1.2 Réseaux usuels

Nous définissons ici certains graphes classiques qui sont le plus souvent étudiés. Dans le cadre que nous étudions, il s'agira de considérer les graphes orientés symétriques associés.

- On note C_N le **cycle** (ou **anneau**) (élémentaire) d'ordre N , de longueur N (voir figure 1.1).
- On note P_N la **chaîne** (élémentaire) d'ordre N , de longueur $N - 1$.
- On note K_N le **graphe complet** d'ordre N , ayant N sommets deux à deux adjacents (voir figure 1.1). On note K_N^* la version orientée.

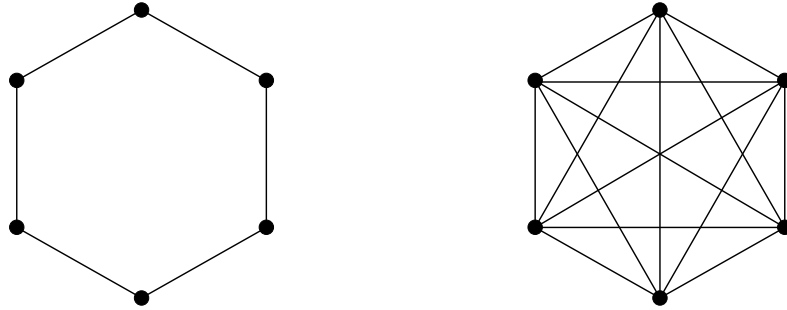


FIG. 1.1 – Le cycle C_6 et le graphe complet K_6 .

- On note $K_{m,n}$ le **graphe biparti complet** d'ordre $m + n$ dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux parties de taille respective m et n et telles que chaque sommet de l'une est adjacent à chaque sommet de l'autre.
- On note H_n l'**hypercube** de dimension n , d'ordre $N = 2^n$, qui est la somme cartésienne de n copies du graphe K_2 . Il se définit récursivement à partir de K_2 :

$$H_n = K_2 \square H_{n-1} = \underbrace{K_2 \square K_2 \square \cdots \square K_2}_{n \text{ fois}}$$

Il peut également se définir comme le graphe dont les sommets sont les mots de longueur n sur l'alphabet $\{0,1\}$, tel que deux sommets sont adjacents si et seulement si leurs mots diffèrent en une seule lettre (voir figure 1.2).

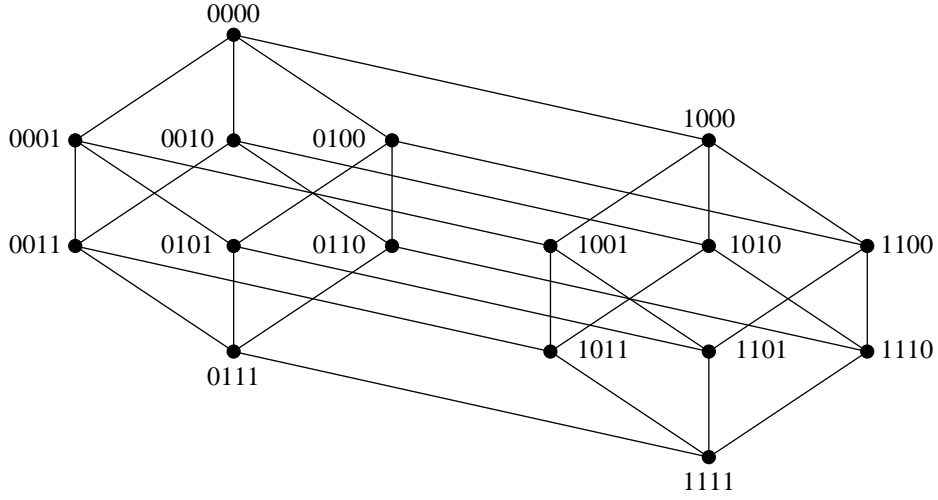


FIG. 1.2 – L'hypercube H_4 .

- On note $M(p_1, p_2, \dots, p_n)$ la **grille** (*mesh*) de dimension n , d'ordre $N = \prod_{i=1}^n p_i$, qui est la somme cartésienne des n chaînes P_{p_i} ($i = 1, 2, \dots, n$), soit $P_{p_1} \square P_{p_2} \square \dots \square P_{p_n}$ (voir figure 1.3).
- On note $TM(l_1, l_2, \dots, l_n)$ la **grille torique** (*toroidal mesh*) ou **tore** de dimension n , d'ordre $N = \prod_{i=1}^n l_i$, qui est la somme cartésienne des n cycles C_{l_i} ($i = 1, 2, \dots, n$), soit $C_{l_1} \square C_{l_2} \square \dots \square C_{l_n}$ (voir figure 1.3). On note $TM(n)^d$ la grille torique somme de d cycles de longueur n .

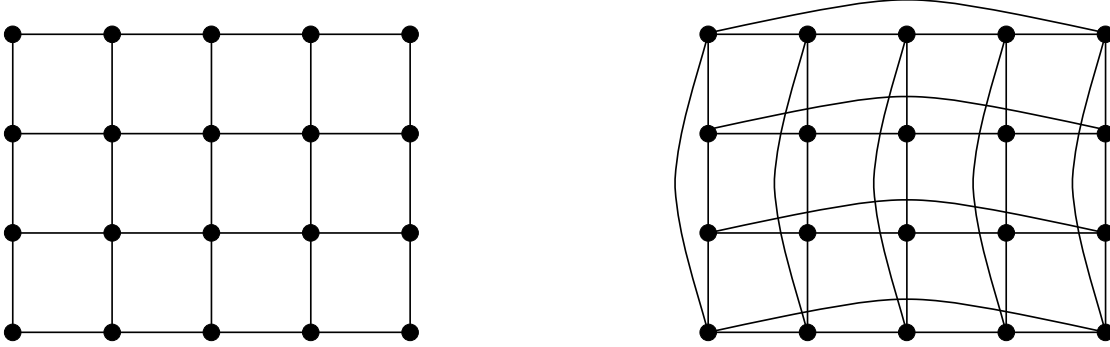


FIG. 1.3 – La grille $M(5,4)$ et le tore $TM(5,4)$.

- Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle. Souvent, les arbres sont dits **enracinés**; cela signifie qu'un sommet appelé **racine** est distingué. Soit

(x,y) une arête d'un arbre enraciné en r avec $d(r,y) = d(r,x) + 1$. On dit que y est un **fil** de x et que x est le **père** de y .

- Un **arbre binaire** est un arbre dont chaque sommet a au plus 2 fils.
- Un **arbre binaire complet de profondeur h** est un arbre binaire d'excentricité par rapport à la racine égale à h et ayant un nombre de sommets maximum ; c'est-à-dire $2^{h+1} - 1$.
- Un **arbre k -aire** est un arbre dont chaque sommet a au plus k fils.
- Un **arbre k -aire complet de profondeur h** est un arbre k -aire d'excentricité par rapport à la racine égale à h et ayant un nombre de sommets maximum. Dans un tel graphe, tous les sommets sont de degré $k + 1$ sauf la racine qui est de degré k et les sommets à distance h de la racine qui sont de degré 1.

1.2 Communications structurées

Nous considérons les communications dans les réseaux comme une succession d'étapes de communications. Les modes de transfert des données sont décrits dans la partie I au chapitre 2 page 21. Pour chaque réseau, muni de ses contraintes de communications, et chaque schéma de communication, l'objectif général est de réduire le nombre d'étapes.

1.2.1 Contraintes de communications

Lors de la modélisation du réseau par un graphe en vue de l'étude des communications structurées, il convient de savoir si les liens de communications entre deux processeurs sont unidirectionnels ou bidirectionnels et si chaque processeur peut communiquer dans une même étape avec plusieurs de ses voisins. Formellement, nous définissons ici quelques contraintes classiques dont la contrainte F_* , full-duplex Δ -port, étudiée dans la partie II.

Dans le cas de liens bidirectionnels, soient x et y deux nœuds du réseau :

- si un seul message à la fois peut circuler entre x et y , soit de x vers y , soit de y vers x , le lien est dit *half-duplex*. Le réseau est alors modélisé par un graphe non orienté.
- si deux messages peuvent circuler en même temps sur le lien, l'un de x vers y et l'autre de y vers x , le lien est dit *full-duplex*. Le réseau est alors modélisé par un graphe orienté symétrique.

On détermine aussi le nombre de liens de communications simultanément utilisables. Si lors d'une étape de communication, chaque nœud peut communiquer

simultanément avec k de ses voisins les communications sont dites k -port. Dans le cas extrême où chaque nœud peut utiliser simultanément tous ses liens, les communications sont dites Δ -port (Δ étant le degré maximum).

On note habituellement F_* la contrainte full-duplex Δ -port où les processeurs peuvent communiquer avec tous leurs voisins et en recevoir des messages lors d'une même étape de communication.

1.2.2 Schémas de communication

Sont définis ici quelques schémas classiques de communication dans les réseaux, dont l'échange total qui est à la base du travail sur les graphes de Cayley dans la partie II ; les autres schémas justifient le travail de minimisation du diamètre ou de l'excentricité dans les réseaux ATM de la partie I.

- **La diffusion** (*one-to-all* ou *broadcasting*) consiste à envoyer un message à tous les nœuds du réseau à partir d'un initiateur unique.
- **L'échange total** (*all-to-all*, *total exchange* ou *gossiping*) consiste à effectuer une diffusion à partir de tous les nœuds simultanément.
- **La distribution** (diffusion personnalisée, *personalized one-to-all*, *distributing* ou *scattering*) consiste, pour un initiateur unique, à envoyer un message différent à chacun des autres processeurs.

Bibliographie

- [Ber83] C. Berge. *Graphes*. Gauthiers-Villars, 1983.
- [BM76] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Mac-Millan Press, 1976.
- [dR94] Jean de Rumeur. *Communications dans les Réseaux de Processeurs*. Collection Études et Recherche en Informatique. Masson, Paris, 1994.
- [Lei92] F. T. Leighton. *Introduction to Parallel Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*. Morgan Kaufmann Publishers, 1992.

Première partie

Topologie logique pour les réseaux de télécommunications

Chapitre 2

La technologie ATM

Les communications modernes se diversifient et s'intensifient si rapidement que les réseaux classiques offrant un service spécifique et fonctionnant en commutation de circuits ou en commutation de paquets sont dépassés. Parce qu'ils ont été conçus pour une utilisation particulière (la conversation, la messagerie, la consultation de données ou la distribution par exemple), ils sont peu flexibles et ont du mal à s'adapter à un flux de données hétérogène. Les données ne sont en effet pas toutes de même type, ne demandent pas le même débit ni la même qualité de service. De plus, les débits que ces réseaux supportent ne sont pas suffisamment élevés pour transmettre certaines données : la transmission de vidéo de haute qualité peut par exemple nécessiter un débit de plusieurs centaines de Mbit/s. Ainsi est née la nécessité de nouveaux réseaux, à la fois flexibles et rapides qu'on appelle les réseaux haut débit.

L'avènement de la fibre optique dans les réseaux de télécommunications permet actuellement de transmettre des données sur des centaines de kilomètres, à des dizaines de Gbit/s, avec des taux d'erreur négligeables. Le problème ne vient donc pas de la transmission mais de la complexité des protocoles effectués au niveau des commutateurs électroniques (protocoles de contrôle ou de routage par exemple). Des protocoles aussi complexes que ceux implémentés par exemple dans les réseaux de paquets existants ne peuvent actuellement être mis en place aux débits requis, à des coûts raisonnables. Aussi, la préoccupation principale du concepteur de réseau haut débit est de simplifier les protocoles pour permettre de réaliser les opérations électroniques suffisamment rapidement pour ne pas trop ralentir le débit offert par la fibre optique.

2.1 Les modes de transfert classiques

Le mode de transfert est la technique utilisée dans un réseau (réseau de processeurs ou réseau de télécommunications) définissant la manière dont s'effectuent la transmission, la commutation et éventuellement le multiplexage. Les modes de

transfert les plus utilisés sont la commutation de circuits (utilisée dans les réseaux téléphoniques par exemple) et la commutation de paquets (utilisée dans les réseaux Internet par exemple).

2.1.1 Commutation de circuits (*circuit-switching*)

La commutation de circuits est un mode de transfert orienté connexion. En effet, lorsqu'un appel est accepté, une liaison (circuit) est établie entre les correspondants avant que ne commence l'échange des informations et cette liaison est détruite à la fin de l'échange. Dans le mode commutation de circuits, cette liaison est fixée pendant tout l'échange. Sa capacité est constante et les ressources qu'elle réserve ne peuvent pas être utilisées par une autre connexion même lorsque le flux de donnée transmis est inférieur à la capacité réservée. Ce mode évite le stockage de l'information dans les nœuds intermédiaires du réseau et permet de réduire le temps des communications longue distance. Différentes unités d'information, appartenant à différentes communications, sont multiplexées temporellement dans une trame de 32 slots (tranche temporelle de taille fixe), chaque slot pouvant transporter un octet. Cette trame se répète toutes les $25\mu s$. Chaque communication a un slot réservé dans une position fixe de la trame. L'identification de la communication à laquelle sont associées les informations qui circulent dans la trame est implicite, elle est liée à la position du slot dans la trame. Ainsi, lorsqu'une source n'a rien à transmettre, le slot ne peut pas être utilisé pour une autre communication.

2.1.2 Commutation de messages (*store-and-forward*)

Il s'agit certainement du mode le plus simple et le plus ancien utilisé dans la quasi totalité des machines parallèles jusqu'au début des années 90. Les messages avancent dans le réseau vers leur destination en transitant par les nœuds intermédiaires où ils sont stockés entièrement avant d'être réémis. A chaque étape, le canal emprunté est aussitôt libéré. Cette technique nécessite l'implémentation de protocoles complexes au niveau de chaque commutateur pour stocker l'information et la router. Ce mode de commutation s'impose dans les cas où tous les processeurs intermédiaires sont intéressés par l'information qui transite dans le réseau. C'est le cas en particulier lorsqu'on cherche à effectuer un échange total (défini page 15) où tous les processeurs doivent connaître toutes les informations contenues dans les nœuds du réseau. La commutation de messages est le mode de commutation utilisé lors des échanges totaux que nous étudions dans les réseaux de processeurs modélisés par des graphes de Cayley aux chapitres 6 et 7 de la partie II.

2.1.3 Leur évolution récente

La construction de réseaux haut débit nécessite une évolution des modes de transfert des données. La commutation de circuits avait l'avantage d'être simple, de transmettre les informations de façon transparente sur le réseau (c'est-à-dire sans inversion dans l'ordre des informations) sur des slots de taille constante et de minimiser les fonctions des commutateurs et des multiplexeurs qui pouvaient donc fonctionner à haut débit. L'inconvénient de ce mode de transfert est son manque de flexibilité. Il n'est pas possible de l'implémenter efficacement pour transporter des trafics différents. En effet, l'identification de l'expéditeur dans un slot est implicite : elle est liée à la position du slot dans la trame et donc immuable. Le multiplexage statistique est quasiment impossible. Pour répondre à ce problème, ce mode a évolué progressivement. D'abord a été proposé le mode *commutation de circuits multi-débit* dans lequel une connexion peut réserver plusieurs slots dans une trame. Mais une connexion de débit élevé doit alors réserver des milliers de slots dans la trame (un slot par trame correspond à 64 kbit/s) ; cela est difficile à gérer. De plus, la capacité réservée pour une connexion est constante ; donc, en cas de flux sporadique (variant beaucoup dans le temps), on ne peut pas allouer les ressources non utilisées par une communication à une autre. Pour palier à ce dernier problème, a été mis en place un mode appelé *commutation de circuits rapide* qui permet aux sources d'annoncer et de modifier le débit dont elles ont besoin. Mais ce système complexifie trop les protocoles effectués au niveau électronique et limite le débit.

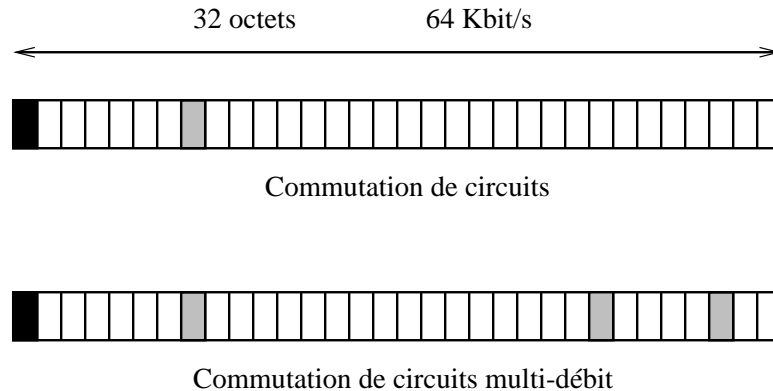


FIG. 2.1 – *La commutation de circuits*

Le mode commutation de paquets quant à lui présentait au contraire l'avantage de la flexibilité puisque quand une source ne transmet rien, les ressources qu'elle n'utilise pas sont récupérées pour d'autres communications. Même lorsque le trafic est sporadique, les ressources sont correctement utilisées. L'inconvénient de ce mode est la complexité des protocoles à traiter. En simplifiant les protocoles de détections d'erreur (moins utiles à présent car la fibre optique est un support de transmission très fiable) et les protocoles de contrôle du flux, on obtient un

mode plus simple appelé *relais de trame* qui permet des débits plus élevés mais n'atteignant pourtant pas la centaine de Mbit/s dont certaines applications ont besoin.

Les idées développées pour faire évoluer les modes commutation de circuits et commutation de paquets les ont finalement fait converger vers un mode de transfert à la fois simple et flexible qui permet le transfert à haut débit de flux de données hétérogène et sporadique. C'est le mode de transfert asynchrone (*asynchronous transfer mode*, ATM) que nous décrivons dans la section suivante.

2.2 Le mode de Transfert asynchrone

L'objectif d'ATM est à la fois de simplifier au maximum les protocoles effectués au niveau des routeurs et de faciliter le multiplexage des données pour permettre une gestion simple des flux sporadiques.

L'ATM est un mode de transfert orienté connexion, basé sur le multiplexage temporel asynchrone, intégrant un minimum de fonctionnalités. Un en-tête, dont la fonction principale est l'identification explicite des circuits virtuels, est associé aux informations utiles. L'asynchronisme vient du fait qu'il n'existe pas de corrélation entre les horloges de la source et du réseau. L'utilisateur envoie ses informations au rythme qui lui convient et non pas au rythme imposé par la répétition des trames, comme c'est le cas dans la commutation de circuits. Le contrôle d'erreur lien par lien ainsi que le contrôle de flux ne sont pas pris en compte, ce qui permet de mettre en place des protocoles relativement simples.

2.2.1 Les cellules ATM

Une évolution naturelle du mode de commutation de circuits consiste à maintenir la transparence des informations dans des slots de taille constante mais d'ajouter à chaque unité d'information un en-tête permettant d'identifier de façon explicite à quel circuit appartiennent les informations. La notion de trame n'est plus nécessaire, une simple suite de slots de taille constante est utilisée. Une source désirant transmettre attend de détecter un slot vide pour y déposer son unité d'information. De cette façon, chaque source n'utilise que les slots dont elle a besoin et elle les marque grâce à l'en-tête. Les informations engendrées par la source sont stockées dans un buffer d'où elles sont extraites par bloc de 48 octets auxquels on ajoute un en-tête de 5 octets pour former une cellule ATM qui est alors déposée dans un slot vide.

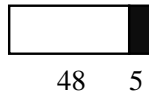


FIG. 2.2 – *La cellule ATM*

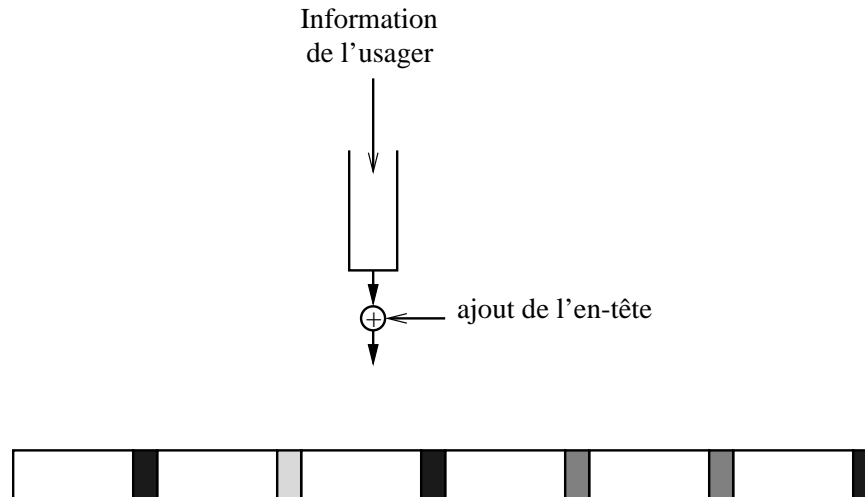


FIG. 2.3 – *Le multiplexage temporel ATM*

2.2.2 Les connexions ATM

Il existe dans les réseaux ATM deux types de connexions :

1. les connexions de chemin virtuel (VPC), et
2. les connexions de canal virtuel (VCC).

La capacité de chaque conduit de transmission (que nous appelons aussi lien physique) est divisée, de manière logique c'est-à-dire sans délimitation physique, en un ou plusieurs liens ATM appelés chemins virtuels (*virtual path*, VP), cette division de la capacité est faite en quelque sorte dans *l'épaisseur* du lien physique (voir figure 2.4). Une connexion de chemin virtuel (VPC) se compose d'un VP ou de la concaténation de plusieurs VP.

La capacité d'un VP est elle-même partagée logiquement par un ou plusieurs liens ATM appelés canaux virtuels (*virtual channel*, VC). Une connexion de canal virtuel (VCC) se compose d'un VC ou de la concaténation de plusieurs VC. Il y a plusieurs VC dans un VP (division de la capacité, division *en épaisseur*) et un VC peut traverser plusieurs VP adjacents (dans *la longueur* du lien physique) (voir figure 2.5).

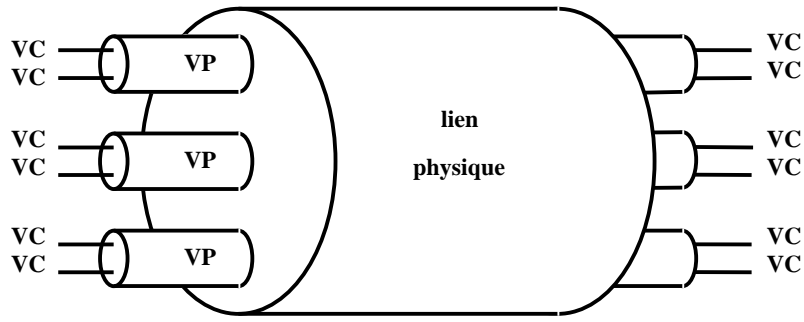


FIG. 2.4 – *Division de la capacité d'un lien de transmission physique*

Une connexion entre deux utilisateurs (VCC) est donc une concaténation de VC qui peuvent eux-mêmes être vus comme une succession de VPC qui sont elles-mêmes des concaténations de VP. On le voit, ATM utilise une hiérarchie de connexions. La figure 2.5, tirée du livre [KG96], présente la hiérarchie des connexions VPC et VCC. Comme l'expliquent plus en détail les auteurs de [KG96], cette hiérarchie permet

- la simplification de l'établissement des connexions, car les VCC utilisent les VPC déjà mises en place, on peut ainsi privilégier certaines connexions très fréquentes ;
- la simplification de la gestion du trafic, car les VPC définissent plusieurs réseaux logiquement indépendants sur le même réseau physique et permettent ainsi un multiplexage sans interférence ;
- la simplification de la synchronisation des différentes connexions des applications multimédia puisque toutes les connexions (VCC) d'une même application passent dans les mêmes VP et sont donc synchronisées.

L'identification des connexions

Chaque cellule porte dans son en-tête des informations identifiant, d'une part, le VP auquel elle appartient et, d'autre part, le VC dans ce VP auquel elle appartient. Ces informations sont appelées, respectivement, identificateur de canal virtuel (VCI) et identificateur de chemin virtuel (VPI). Un VP est identifié par le VPI, un VC est identifié par le couple VPI/VCI. Ces identificateurs sont locaux, ils peuvent être différents pour deux liens d'une même connexion. Les commutateurs (ou brasseurs) sont de deux types, les commutateurs de VP, qui concatènent les VP et traduisent les valeurs des VPI et les commutateurs de VC qui terminent les VPC, concatènent les VC et traduisent les VCI.

Dans un brasseur de VP, seuls les VPI changent. Si le VP1 est commuté sur le VP2, et si les VC8 et VC9 partageaient le VP1 alors, ces VC gardent le même identificateur de VC et partagent le VP2.

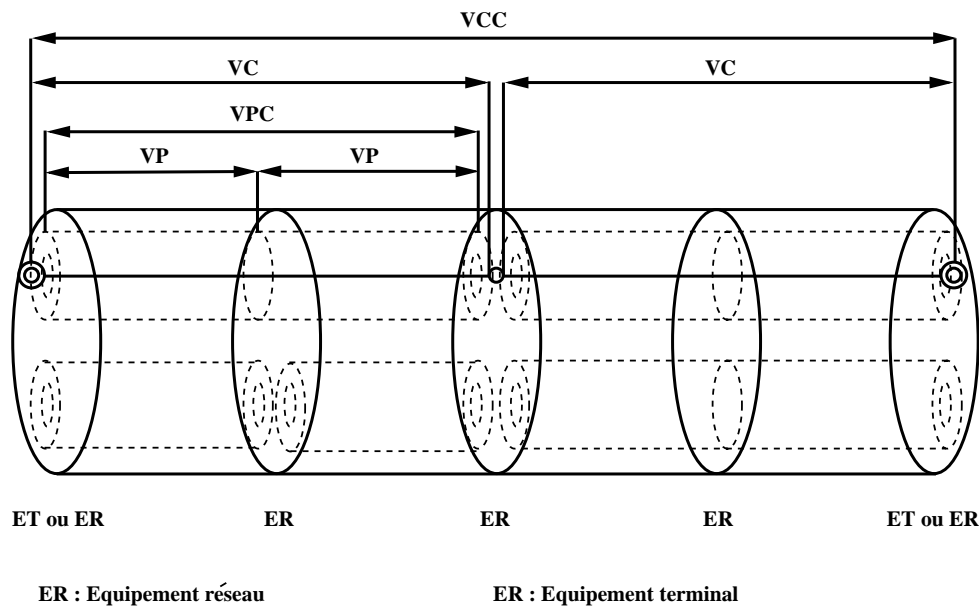


FIG. 2.5 – *Connexions ATM: VPC et VCC*

Le livre [KG96] décrit en introduction les nouveaux besoins en télécommunications, explique la nécessité de construire des réseaux haut débit et montre comment le concept ATM a été retenu avant de le décrire en détail. Il décrit aussi les solutions envisagées pour éviter la congestion dans les réseaux ATM. On trouve dans ce livre une étude plus particulière des réseaux haut débit locaux et, dans une dernière partie, une description des dernières avancées en matière de composants optoélectroniques, la présentation et la motivation de la technique de multiplexage en longueur d'onde ainsi qu'une présentation de diverses architectures de réseaux locaux tout-optique. Les lecteurs intéressés par la technique de multiplexage en longueur d'onde dans les réseaux optiques et les problèmes qui en découlent du point de vue théorique pourront consulter la thèse [Bea00].

2.3 Modèle : première approche

Nous nous intéressons au nombre de chemins virtuels traversés par une connexion entre deux usagers du réseau. En effet, comme les protocoles électroniques sont implémentés au niveau des commutateurs de VP, le nombre de VP traversés est fortement lié au délai que vont subir les informations transitant sur cette connexion. Grossièrement, on s'intéresse au nombre de fois où la cellule ATM va être arrêtée pour la lecture de son en-tête et son routage vers un autre VP.

D'autre part, nous nous intéressons à la capacité nécessaire dans les liens physiques pour positionner les VP. Ce paramètre est lié au coût financier du réseau

puisque la capacité des liens dépend de l'équipement mis en place.

Pour simplifier l'étude de ces deux paramètres, nous supposons que les VP sont de capacité unitaire et que les liens physiques sont de capacités constantes, toutes égales. La capacité d'un lien physique est alors simplement le nombre de VP que ce lien peut supporter.

2.3.1 Première Modélisation

Les VP forment un réseau virtuel sur le réseau physique. Comme les connexions s'établissent par concaténation de VP, tout se passe comme si on communiquait point à point dans le réseau formé par les VP, qu'on appelle le *réseau virtuel*. Le nombre de VP traversés par une connexion entre deux points du réseau physique correspond à la distance entre ces deux points dans le réseau virtuel. La figure 2.6 représente (sans aucune garantie d'échelle) un réseau ATM imaginaire entre quelques villes françaises. Les liens physiques sont représentés par des traits noirs et les chemins virtuels par des traits clairs. Pour établir une connexion entre Paris et Sophia dans ce réseau, il existe au moins deux solutions. La première est d'établir la connexion le long des VP Paris-Marseille, Marseille-Toulon, Toulon-Cannes, Cannes-Sophia ; la seconde est d'établir la connexion le long des VP Paris-Marseille, Marseille-Nice, Nice-Sophia. La première solution utilise quatre VP, la seconde seulement trois. Pourtant, la première solution utilise le plus court chemin physique, la seconde utilise un chemin physique plus long. Comme nous l'avons vu, les délais d'établissement d'une connexion et de communication sont limités par le nombre de commutateurs de VP traversés et non pas par la distance physique. Aussi, la seconde solution est meilleure.

En termes de charge, on voit que le positionnement des chemins virtuels est tel que la charge maximale sur les liens physiques est deux. Par exemple, le lien physique entre Paris et Lyon supportent les deux VP Paris-Lyon et Paris-Marseille.

La position des VP dans le réseau physique est représentée par une fonction du réseau virtuel dans le réseau physique qui associe à un arc du réseau virtuel le VP auquel il correspond dans le réseau physique. Cette fonction, bien connue en théorie des graphes, est appelée un *plongement* du réseau virtuel dans le réseau physique. Un exemple simple de cette modélisation est représenté sur la figure 2.7. On y voit à gauche le réseau virtuel et à droite le réseau physique avec, dessinés en plus clair, les VP, images des arcs du graphe virtuel par le plongement.

Au chapitre suivant, nous présentons plus formellement le modèle ainsi que le problème que nous étudions.

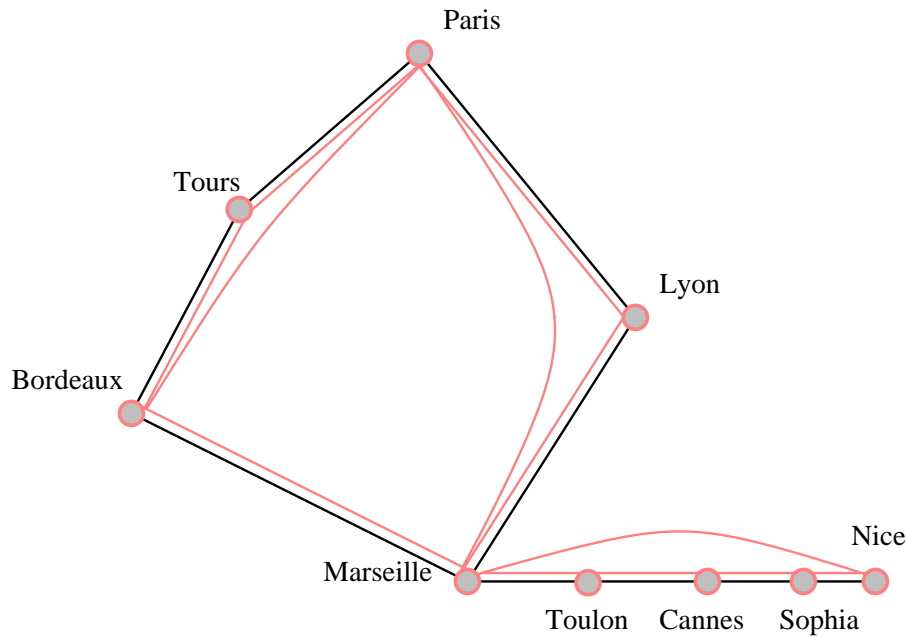


FIG. 2.6 – *Un réseau ATM imaginaire*

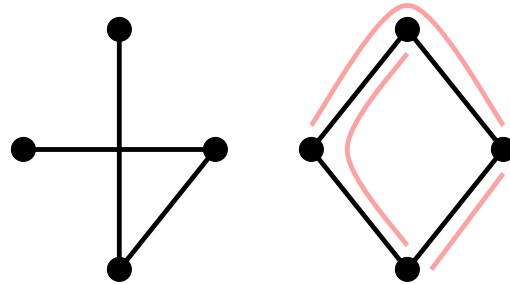


FIG. 2.7 – *Le réseau virtuel et son plongement dans le réseau physique*

2.3.2 Topologie virtuelle

L'idée d'une topologie virtuelle construite par dessus une topologie physique n'est pas spécifique au problème du positionnement des chemins virtuels dans les réseaux ATM. On la retrouve dans d'autres problèmes de télécommunication. On pourra se référer au livre de Stern et Bala [SB99] qui définit plusieurs *Logically Routed Networks* dont les sommets peuvent être aussi bien des commutateurs ATM, que des routeurs IP, des systèmes SONET ou des utilisateurs finaux (voir chapitres 3.5 et 7 du livre). Sur une topologie physique qui reste un réseau optique, il s'agit alors de superposer divers types de réseaux virtuels. D'un point de vue théorique, le problème se modélise de la même façon.

Notons aussi qu'il existe dans la littérature une autre approche complémentaire

dans laquelle on cherche à réaliser l'instance de communication directement sur le réseau physique ; par exemple, en utilisant pour chaque requête un chemin avec une longueur d'onde fixée (voir la thèse [Bea00] pour une synthèse sur ce sujet).

Bibliographie

- [Bea00] Bruno Beauquier. *Communications dans les réseaux optiques par multiplexage en longueur d'onde*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, janvier 2000.
- [KG96] Daniel Kofman and Maurice Gagnaire. *Réseaux haut débit*. Collection Informatiques. Paris : InterEditions, 1996.
- [SB99] Thomas Stern and Krishna Bala. *Multiwavelength Optical Networks, A Layered Approach*. Addison-Wesley, 1999.

Chapitre 3

Modèle et Résultats

Dans la section 3.1, nous modélisons plus formellement la situation détaillée dans le chapitre précédent en définissant ce que nous appelons le graphe physique et les requêtes de connexion puis en expliquant les contraintes intervenant dans la construction d'un « bon » VPL. Nous discutons ensuite dans la section 3.2 des avantages respectifs des modèles orienté et non orienté. Dans la section 3.3 nous formulons le problème et donnons une idée de sa complexité. Les sections 3.5 et 3.6 présentent les résultats existant dans la littérature, respectivement pour les réseaux quelconques et pour certains réseaux particuliers, les plus communs : le chemin, le cycle, les arbres, la grille et le tore. Les résultats sont présentés pour chaque réseau, d'abord dans le cas d'une requête de type diffusion, puis dans le cas d'une requête d'échange total. La dernière section présente des problèmes proches : la construction d'un VPL avec facteur d'étirement borné en section 3.7.1 et la construction d'un VPL minimisant la charge sur les sommets en section 3.7.2.

3.1 Définitions et Notations

Le réseau physique est représenté par un graphe $G = (V, E)$, orienté ou non orienté selon le modèle choisi.

3.1.1 Les requêtes

- En orienté, une *requête de connexion* est modélisée par un couple «source-destination». L'ensemble des requêtes (aussi appelé instance), noté I , est un sous-ensemble de $V \times V$ formé de couples de sommets de G .
- En non orienté, une *requête de connexion* est modélisée par une paire de sommets. L'ensemble des requêtes (aussi appelé instance), noté I , est formé de paires de sommets de G .

Jusqu'à présent, les recherches ont principalement porté sur l'étude de deux types de requêtes. Le premier type de requêtes de connexion correspond en com-

munication à une demande de distribution (définie page 15) ou de diffusion, appelée aussi en anglais *One-to-All*, où un sommet particulier, l'initiateur, souhaite communiquer avec tous les autres. Si s est l'initiateur alors $I = \{s\} \times V$. D'une façon générale, on note un ensemble de requêtes du type one-to-all par OA. Un initiateur est alors sous-entendu. Soit il a été précisé dans le texte, soit il peut être un sommet quelconque du graphe sans que cela affecte le résultat énoncé. Le second type correspond à une demande d'échange total (définie page 15), appelé aussi en anglais *All-to-All*, où chaque sommet souhaite communiquer avec tous les autres. Étant donné un graphe, une instance de ce type est unique : $I = V \times V$ aussi notée AA. On considérera aussi les requêtes du type *One-to-Many* (correspond à un schéma de communication de *multicast*), où un sommet particulier souhaite communiquer avec un groupe de sommets. Soit s l'initiateur et $V' \subset V$ le groupe de sommets avec lequel s souhaite communiquer, on a $I = \{s\} \times V'$. Une instance de ce type est souvent notée OM. Une instance du type $V' \times V'$ est appelée *Many-to-Many* et est parfois notée MM.

3.1.2 VPL ou Positionnement des chemins virtuels

Le terme anglais VPL est l'acronyme de *Virtual Path Layout* et signifie littéralement *positionnement des chemins virtuels*. Étant donné un réseau physique modélisé par un graphe $G = (V, E)$, un ensemble de couples de sommets représentant les requêtes de communication dans ce graphe, deux paramètres c et h limitant respectivement la capacité des liens physiques et le nombre de sauts maximum admis pour établir une connexion, il s'agit de savoir s'il existe un ensemble de chemins virtuels positionnés dans le graphe physique qui ne charge pas un lien plus que sa capacité c et tel que chaque requête puisse être satisfaite en au plus h sauts.

Plus formellement, on cherche

- E' un ensemble de liens, appelés liens virtuels, formés de couples de sommets du graphe physique, et
- une fonction de routage \mathcal{P} de E' dans $\mathcal{P}(G)$, l'ensemble des chemins de G , qui à un lien virtuel (x, y) associe un chemin de x à y dans le graphe G . Un tel chemin est appelé *chemin virtuel*.

On parle du *graphe virtuel* $H = (V, E')$ dont les sommets sont ceux du graphe physique et dont l'ensemble des liens est E' . Lorsqu'aucune confusion n'est possible, le diamètre de H est appelé *diamètre virtuel*.

On note un VPL par le couple (H, \mathcal{P}) . Dans certains graphes physiques, le plongement des liens de H dans l'ensemble des chemins de G est implicite. C'est par exemple le cas dans le chemin, le cycle, les arbres et même la grille si les chemins virtuels joignent deux sommets n'ayant qu'une coordonnée différente. Dans ces cas, le VPL est entièrement défini par la donnée du graphe H .

3.1.3 Les contraintes : capacité et nombre de sauts

Les contraintes physiques liées au coût du réseau et au temps d'établissement d'une connexion induisent naturellement deux paramètres lors de la modélisation. Le premier de ces paramètres limite l'utilisation d'un lien physique, c'est sa *capacité*. Le terme est consacré bien qu'il porte à confusion. Il ne s'agit pas ici du débit que peut supporter le lien physique mais d'une capacité logique. Nous appelons *capacité d'un lien physique* le nombre de chemins virtuels qui peuvent partager ce lien. Si le débit dans les chemins virtuels est fixé, alors, la capacité d'un lien physique est proportionnelle au débit que celui-ci peut supporter et donc directement liée au coût de l'équipement. Limiter la capacité, c'est limiter le coût de fabrication du réseau. Lors du positionnement des chemins virtuels, il s'agira de ne pas charger un lien plus que sa capacité.

D'autre part, comme le temps d'établissement d'une nouvelle connexion est proportionnel au nombre de chemins virtuels traversés, on définit le second paramètre, le *nombre de sauts*, comme étant le nombre minimal de chemins virtuels qu'on doit emprunter pour réaliser une requête.

Dans notre travail, nous notons c et h les paramètres limitant respectivement la capacité du réseau et le nombre de sauts possible pour satisfaire une requête. La capacité est donc uniforme, c'est-à-dire la même pour chaque lien physique. Exceptionnellement, nous considérerons deux capacités possibles, c^+ et c^- , par exemple dans le cycle orienté pour les arcs orientés dans le sens positif et ceux orientés dans le sens négatif.

3.1.4 Les objectifs : charge et distance maximale d'un VPL

Étant donné un VPL (H, \mathcal{P}) , on calcule la *distance maximale du VPL* comme étant la distance maximale dans le graphe virtuel entre deux sommets d'une requête de connexion :

$$D(G, H, I) = \max \{d_H(x, y) \mid (x, y) \in I\}$$

Dans le cas où $I = \mathbf{AA}$, l'instance de communication *all-to-all*, la distance maximale correspond au diamètre du graphe virtuel. Dans le cas où $I = \mathbf{0A}$ est une instance de communication du type *one-to-all*, la distance maximale correspond à l'excentricité de l'initiateur dans H .

On peut aussi calculer la *charge du graphe G par le VPL* comme le nombre maximal de chemins virtuels qui empruntent un lien physique :

$$\pi(G, H, \mathcal{P}) = \max_{e \in E} |\{e' \in E' \mid e \in \mathcal{P}(e')\}|$$

On voit que la charge et la distance maximale sont en conflit puisque, pour limiter la charge du réseau physique, il faut diminuer le nombre de chemins virtuels, ou leur longueur, ce qui nous amènera à construire un graphe virtuel de plus grande distance maximale. Réciproquement, si on se permet de charger beaucoup les liens physiques, on pourra construire un VPL dans lequel la distance maximale sera faible.

3.1.5 La classe $VPL(G, I, h, c)$

Soit G un graphe. L'ensemble des VPL (H, \mathcal{P}) tels que $\pi(G, H, \mathcal{P}) \leq c$ et $D(G, H, I) \leq h$ est noté $VPL(G, I, h, c)$. Si cet ensemble est non vide, on dit que ses éléments sont des VPL *réalisables* sur le graphe G avec l'instance de connexion I et les contraintes c et h . On dit aussi que G admet un VPL satisfaisant l'ensemble de requêtes I avec une capacité inférieure à c et un nombre de sauts inférieur à h .

3.2 Modèles orienté et non orienté

Le problème est le plus souvent abordé dans sa version non orientée. Le graphe G est non orienté ; les chemins virtuels chargent les arêtes du graphe physique et peuvent être empruntés dans les deux sens lors d'une connexion entre deux sommets. Cette modélisation correspond au cas où les communications sont bidirectionnelles. Elle impose que s'il existe un chemin virtuel de u vers v alors, il existe aussi un chemin virtuel symétrique de v vers u . C'est effectivement la manière dont les réseaux ATM sont implémentés à l'heure actuelle.

Pourtant, une discussion avec Daniel Kofman, co-auteur de [KG96], nous a confirmé que les deux chemins virtuels ne nécessitent pas forcément la même capacité. En effet, dans de nombreuses applications, les flots de données ne sont pas les mêmes dans les deux sens. Ainsi, dans une application vidéo où u est le serveur et v un consommateur, la transmission des données vidéo de u vers v nécessite une large bande passante tandis que les opérations de contrôle de v vers u sont très faibles. Une modélisation orientée des chemins virtuels semble donc mieux convenir aux applications de ce type. Il conviendrait de positionner des chemins virtuels orientés et pondérés, et de calculer la charge d'un lien comme la somme des poids des chemins virtuels qui l'empruntent. Ce modèle complexe est difficile à manipuler. Aussi nous n'avons conservé que l'hypothèse d'orientation. Les chemins virtuels que nous manipulons sont orientés et tous de capacité unitaire. Ainsi, pour calculer la charge d'un lien physique, il suffit de compter le nombre de chemins virtuels qui l'empruntent. Dans ce modèle simplifié, nous modélisons la situation précédente par une communication unidirectionnelle de u le serveur vers v le consommateur, en oubliant les opérations qui chargent peu le réseau.

Le modèle non orienté est introduit et motivé dans [GZ94] puis [CGZ94]. Le

modèle orienté est introduit dans [BCG97] et étudié dans [BCG99] et dans la thèse [Cha98].

Pour distinguer les notations, on positionnera systématiquement une flèche sur les notations π et D pour signifier qu'il s'agit du cas orienté. Pour simplifier notre propos, lorsqu'une définition ou un résultat peut être énoncé de la même manière en orienté ou en non orienté, on parle de *graphe*, sans orientation implicite. C'est le cas, par exemple, des problèmes de la section suivante qu'il faut lire pour les deux cas. Il en est de même pour l'instance de connexion qui est formée de couples si le graphe est orienté, de paires sinon.

3.3 Formulation du Problème et Complexité

Dans notre étude, nous disposons d'un graphe modélisant le réseau et d'un ensemble de requêtes de connexion. Il s'agit de construire un VPL efficace, proposant un compromis entre la charge du réseau et le nombre de sauts maximal dans une requête. Le problème peut s'énoncer sous la forme d'un problème de décision de la façon suivante.

3.3.1 Les problèmes

PROBLÈME A, de l'existence d'un VPL

- Données :** un graphe G , une instance I de requêtes dans G et h et c deux entiers.
- Question :** existe-t-il un VPL réalisable sur le graphe G avec l'instance de connexion I , et les contraintes de charge c et de nombre de sauts h ?

Cette formulation induit deux problèmes d'optimisation dits *duaux* :

PROBLÈME B, du Nombre de Sauts Minimal

- Entrée :** un graphe G , une instance I de requêtes dans G et une capacité c_0 .
- Sortie :** un VPL (H, \mathcal{P}) réalisable sur le graphe G avec la contrainte de charge c_0 .
- Objectif :** minimiser $D(G, H, I)$ (en orienté $\vec{D}(G, H, I)$).

On note $D(G, I, c_0)$ (en orienté $\vec{D}(G, I, c_0)$) ce minimum, appelé le *nombre de sauts optimal* du graphe G pour les requêtes I avec la capacité c_0 . Ces fonctions sont définies formellement par

$$D(G, I, c_0) = \min_{\{(H, \mathcal{P}) \mid \pi(G, H, \mathcal{P}) \leq c_0\}} D(G, H, I)$$

$$\vec{D}(G, I, c_0) = \min_{\{(H, \mathcal{P}) \mid \vec{\pi}(G, H, \mathcal{P}) \leq c_0\}} \vec{D}(G, H, I)$$

PROBLÈME C, de la Charge Minimale

- Entrée :** un graphe G , une instance I de requêtes dans G et un nombre de sauts h_0 .
- Sortie :** un VPL (H, \mathcal{P}) réalisable sur le graphe G avec l'instance de connexion I et la contrainte de distance h_0 .
- Objectif :** minimiser $\pi(G, H, \mathcal{P})$ (en orienté $\vec{\pi}(G, H, \mathcal{P})$).

On note $\pi(G, I, h_0)$ (en orienté $\vec{\pi}(G, I, h_0)$) ce minimum, appelé la *charge optimale* du graphe G pour les requêtes I avec le nombre de sauts h_0 et défini formellement par

$$\pi(G, I, h_0) = \min_{\{(H, \mathcal{P}) \mid D(G, H, I) \leq h_0\}} \pi(G, H, \mathcal{P})$$

$$\vec{\pi}(G, I, h_0) = \min_{\{(H, \mathcal{P}) \mid \vec{D}(G, H, I) \leq h_0\}} \vec{\pi}(G, H, \mathcal{P})$$

3.3.2 Complexité du Problème

Le problème A est \mathcal{NP} -complet en général, et même dans le cas $h = 1$ puisqu'il est équivalent au problème du multi-flot entier [GJ79].

Dans [EIS76], il est même montré que le problème de trouver deux chemins arc-disjoints entre deux couples de sommets d'un graphe orienté est \mathcal{NP} -complet. Ce problème correspond au problème A pour $h = 1$, $c = 1$ et $I = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$.

Dans le cas non orienté le problème est polynomial lorsque le nombre de requêtes est fixé [RS95]. Dans [Jar99], une réduction de ce problème au cas d'un graphe orienté symétrique est faite. Le problème est donc polynomial dans le cas orienté symétrique pour un nombre de requêtes fixé.

Dans le cas d'une instance de type one-to-many (donc aussi pour one-to-all), le problème est polynomial pour $h = 1$ puisqu'il est équivalent à un problème de flot entier (voir plus de détails page 68 où l'on définit les flots).

D'autres résultats de complexité pour des problèmes plus contraints sont donnés pages 58 et 61.

3.4 Arête et arc-indice de transmission

Nous présentons dans cette section la relation entre l'invariant *indice de transmission* d'un graphe et nos paramètres. Nous donnons ensuite des valeurs ainsi que des encadrements classiques de ce paramètre.

3.4.1 Définitions

Un *routage* est la donnée, pour tout couple de sommets (x, y) , d'une chaîne si le graphe est non orienté, d'un chemin en orienté, reliant x à y . Chercher à positionner des chemins virtuels pour l'instance de connexion **AA** en un saut revient donc à choisir un routage dans le graphe. Ainsi, la notion introduite par Heydemann, Meyer et Sotteau dans [HMS89] se trouve fortement liée à notre problème.

DÉFINITIONS. La *charge d'une arête* e par un routage est le nombre de chaînes passant par e .

L'*arête-indice de transmission d'un routage* est le maximum de l'ensemble des charges des arêtes du graphe.

L'*arête-indice de transmission du graphe* G est le minimum sur tous les routages de l'arête-indice de transmission d'un routage. On le note $\pi(G)$.

$\pi(G)$ est donc le plus petit entier c tel que $D(G, \mathbf{AA}, c) = 1$; on a donc $\pi(G, \mathbf{AA}, 1) = \pi(G)$. Les mêmes définitions existent en orienté pour définir l'*arc-indice de transmission d'un graphe orienté* G comme le minimum sur tous les routages du maximum de la charge d'un arc par le routage. On le note $\vec{\pi}(G)$. On a de même $\vec{\pi}(G, \mathbf{AA}, 1) = \vec{\pi}(G)$.

D'une manière plus générale, nous étudions ici le cas général où $h = 1$, quelle que soit l'instance de connexion I . Nous notons $\pi(G, I) = \pi(G, I, 1)$. Dans le cas particulier de l'instance all-to-all, on a donc $\pi(G, \mathbf{AA}) = \pi(G)$.

Il est intéressant de calculer ce paramètre. Dans le chapitre 4, nous montrons en effet que

$$2\Delta\pi(G, I, h) \geq (\Delta\pi(G, I))^{\frac{1}{h}}$$

Cette borne est souvent fine comme le montrent certaines constructions données dans le cas de l'instance all-to-all. Pour le cas d'une instance de type one-to-many (et donc en particulier pour les instances de type one-to-all) nous montrons que la borne est toujours fine au chapitre 4, page 73.

Le paramètre π a été intensément étudié et plusieurs relations existent entre π et d'autres paramètres comme la bisection ou l'expansion d'un graphe (voir par exemple [MT96] ou [Sol95]). Nous donnons ci-dessous l'indice de transmission

des graphes usuels et montrons dans la section 3.4.3 que ce paramètre est facile à approximer.

3.4.2 L'indice de transmission des graphes usuels

chemin P_n [HMS89]	cycle C_n [HMS89]	arbre T	grille $M(a,b)$ $a \leq b$	graphe général
$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\left\lceil \frac{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}{2} \right\rceil$	$\max T_1 \cdot T_2 ^*$	ab^2	$\Omega \left(\frac{n \log n}{\Delta \log \Delta} \right)$

(*) Pour l'arbre, le maximum est calculé sur l'ensemble des couples de sous-arbres (T_1, T_2) dont l'ensemble des sommets forme une partition de V . Le produit $|T_1| \cdot |T_2|$ est la charge de l'arête qui relie T_1 à T_2 . On trouve des encadrements de l'indice de transmission d'un arbre dans [HMS89].

La borne donnée pour le graphe général se calcule comme la borne de Moore présentée page 47. Nous reviendrons sur ce calcul pour montrer que $2\Delta\pi(G, I, h) \geq (\Delta\pi(G, I))^{\frac{1}{h}}$, page 69.

3.4.3 Approximation de l'indice de transmission

Bien que le calcul de l'indice de transmission soit un problème \mathcal{NP} -complet, ce paramètre peut être facilement approximé.

DÉFINITION. Si X et Y sont deux ensembles de sommets de G , on note $[X, Y]$ l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans X et l'autre dans Y . Lorsque (X, Y) forme une partition des sommets de V , l'ensemble $[X, Y]$ est appelé une *coupe* (ou coupe-arête) de G . Lorsque $x \in X$ et $y \in Y$, on dit que la coupe *sépare* x et y .

Nous donnons d'abord deux bornes simples. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et $[S, \bar{S}]$ une coupe :

$$\pi(G, I) \geq \frac{\sum_{(x,y) \in I} d(x,y)}{|E|} \quad (3.1)$$

$$\pi(G, I) \geq \frac{|\{(x,y) \in (S \times \bar{S}) \cap I\}|}{|[S, \bar{S}]|} \quad (3.2)$$

La borne (3.1) s'obtient en comptant la charge globale sur les arêtes et en divisant par le nombre d'arêtes, la borne (3.2) en comptant la charge globale sur la coupe (*crossing demand*) et en divisant par le nombre d'arêtes de la coupe.

Si ω est une fonction positive de poids sur les arêtes (qui peut être interprétée comme la longueur de l'arête). On définit alors $d_\omega(x,y)$ comme la distance dans G_ω (graphe G pondéré sur les arêtes par ω), c'est-à-dire la plus petite somme des poids des arêtes le long d'un chemin de x à y .

On peut définir l'*indice de transmission réel* $\pi_{\mathbb{R}}(G,I)$ comme la capacité minimale nécessaire pour faire passer un multi-flot réel dont les requêtes sont $V \times V \times \{1\}$, c'est-à-dire que pour tout couple de sommets (x,y) de V^2 , on veut faire passer une unité de flot de x à y . Cela correspond à fractionner le chemin de x à y en plusieurs chemins de poids total 1. On a, par le même raisonnement que pour la borne 3.1 le résultat suivant :

$$\pi_{\mathbb{R}}(G,I) \geq \max_{\omega} \frac{\sum_{(x,y) \in I} d_\omega(x,y)}{\sum_{e \in E} \omega(e)}$$

Par la dualité de la programmation linéaire, il est montré (par exemple dans [CCPS98]) que cette inégalité est en fait une égalité. Ce résultat est appelé « théorème chinois ».

Il est clair que

$$\pi(G,I) \geq \pi_{\mathbb{R}}(G,I) \quad (3.3)$$

Les deux bornes (3.1) et (3.2) sont en fait des cas particuliers de la borne plus générale (3.3). Il suffit en effet de prendre $\omega(e) = \frac{1}{|E|}$ pour trouver (3.1) et $\omega(e) = 0$ si e n'est pas dans la coupe, $\omega(e) = \frac{1}{|[S,\bar{S}]|}$ si e est dans la coupe pour trouver (3.2).

Enfin, il est montré dans [RT87] que

$$\pi(G,I) \leq \pi_{\mathbb{R}}(G,I) + O\left(\sqrt{\pi_{\mathbb{R}}(G,I)} \log |E|\right)$$

Comme le paramètre $\pi_{\mathbb{R}}(G,I)$ se calcule en temps polynomial par la programmation linéaire, ces encadrements montrent que $\pi(G,I)$ est relativement facile à approximer. Il existe en effet un algorithme polynomial calculant un routage de charge au plus $\pi(G,I) + O\left(\sqrt{\pi_{\mathbb{R}}(G,I)} \log |E|\right)$. Cette approximation est très bonne pour les graphes d'indice de transmission grand par rapport à $(\log |E|)^2$ et en particulier pour les graphes de degré borné.

Cas de l'instance AA

Dans le cas particulier de l'instance all-to-all, l'équation 3.2 donne :

$$\pi(G,I) \geq \max \frac{|S| \cdot |\bar{S}|}{|[S,\bar{S}]|}$$

qui est relié au *facteur d'arête-expansion* β défini par :

$$\beta = \min \frac{|[S, \bar{S}]|}{|S| \cdot |\bar{S}|}$$

On voit que

$$\pi \geq \frac{1}{\beta}$$

et il est démontré que c'est une bonne approximation puisque :

Théorème 3.1 ([LR88])

$$\pi = O\left(\frac{\log n}{\beta}\right)$$

L'article [Sol95] donne d'autres relations entre les indices d'expansion et de transmission.

3.5 Bornes Générales

Nous donnons ici les bornes indépendantes de la topologie du graphe physique. Il s'agit d'abord de relations, triviales mais néanmoins intéressantes, entre les différents paramètres de même nature (les paramètres charge entre eux, les paramètres nombre de sauts entre eux) ; et enfin de relations reliant la charge au nombre de sauts.

3.5.1 Relations entre les paramètres

Relation entre π et $\vec{\pi}$, entre D et \vec{D}

Il est intéressant de comparer les bornes dans les cas orienté et non orienté. Lorsqu'on positionne des chemins virtuels orientés, on se permet de mettre un chemin entre x et y et de ne pas en mettre entre y et x . Aussi, les bornes sont-elles toujours meilleures (c'est-à-dire au moins aussi bonnes) en orienté qu'en non orienté. Bien souvent, les solutions proposées pour un positionnement optimal en orienté ne sont pas symétriques (voir par exemple la construction dans le cycle capacité 1 page 107) et ne peuvent donc pas fournir directement un positionnement optimal en non orienté. Pourtant, étant donné un VPL orienté, on peut construire un VPL dans le graphe non orienté en oubliant l'orientation des liens physiques et virtuels (cette opération double la charge et n'augmente pas le diamètre). De même, étant donné un VPL sur le graphe non orienté, on peut construire un VPL orienté en remplaçant un chemin virtuel non orienté par deux chemins virtuels orientés de sens opposé ; cette opération n'augmente ni la charge ni le diamètre.

Soit G^* le graphe orienté symétrique obtenu à partir d'un graphe non orienté G en prenant dans $A(G^*)$ les arcs $a = (x, y)$ et $a' = (y, x)$ pour chaque arête $e = [x, y]$

de $E(G)$. Soit I^* l'instance de connexion dans G^* obtenue à partir d'une instance I de connexion dans G en prenant comme requêtes de connexion les couples (x,y) et (y,x) pour chaque requête $[x,y]$ de I . La remarque du paragraphe précédent implique le résultat suivant :

Théorème 3.2

$$\vec{\pi}(G^*, I^*, h_0) \leq \pi(G, I, h_0) \leq 2\vec{\pi}(G^*, I^*, h_0)$$

ou

$$\vec{D}(G^*, I^*, c_0) \leq D(G, I, c_0) \leq \vec{D}(G^*, I^*, \frac{c_0}{2})$$

Ainsi, tous les ordres de grandeur (c'est-à-dire de la forme Θ , Ω ou O) sur la charge π sont valables en orienté et en non orienté. Les bornes supérieures données en non orienté sont aussi valables en orienté tandis que les bornes inférieures en orienté sont valables en non orienté.

Relation entre $\pi(G, OA, h)$ et $\pi(G, AA, h)$

En non orienté, les résultats obtenus pour un ensemble de requêtes du type one-to-all (OA) peuvent être utilisés pour l'instance AA si on s'autorise un nombre de sauts double. En effet, pour se rendre d'un point à un autre, il suffit de rejoindre l'initiateur puis de se rendre à destination. Plus formellement, le diamètre d'un graphe est au plus 2 fois son excentricité minimale. Ainsi, on trouve que :

Théorème 3.3

$$\pi(G, AA, 2h_0) \leq \pi(G, OA, h_0)$$

ou

$$D(G, AA, c_0) \leq 2D(G, OA, c_0)$$

Le même résultat est valable pour les communications de groupes et, si $OM = \{s\} \times V'$ désigne une instance de communication du type one-to-many et $MM = V' \times V'$ l'instance associé du type many-to-many, on a :

Théorème 3.4

$$\pi(G, MM, 2h_0) \leq \pi(G, OM, h_0)$$

ou

$$D(G, MM, c_0) \leq 2D(G, OM, c_0)$$

Relation entre $\pi(G, I, 1)$ et $\pi(G, I, h)$

Nous montrons les cinq théorèmes suivants dans le chapitre 4, pages 69, 70, 76 et 77. Tout d'abord la borne inférieure générale :

Théorème 4.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe de degré maximal Δ , I une instance de connexion et h un entier non nul, on a :*

$$2\Delta\pi(G, I, h) \geq (\Delta\pi(G, I))^{\frac{1}{h}}$$

Puis les bornes supérieures, d'abord pour des instances de type one-to-many :

Théorème 4.4 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et OA une instance du type one-to-all,*

$$\pi(G, OA, 2) \leq 2 \cdot \left\lceil \sqrt{\pi(G, OA, 1)} \right\rceil - 1$$

Plus généralement, on montre que :

Théorème 4.8 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et OM une instance du type one-to-many,*

$$\pi(G, OM, h) = h \cdot \pi(G, OM, 1)^{\frac{1}{h}} - h + 1$$

Ce théorème prouve que la borne donnée au théorème 4.3 est fine pour des instances du type one-to-many (et donc en particulier one-to-all). On trouve ensuite une borne sur même genre pour les arbres avec l'instance all-to-all :

Théorème 4.10 *Pour tout arbre T ,*

$$\pi(T, AA, 2) \leq \sqrt{\pi(T)}$$

Ce théorème montre que la borne donnée dans le théorème 4.3 est fine pour l'instance all-to-all et diamètre 2 dans les arbres. Et enfin une borne pour l'instance all-to-all dans les graphes généraux :

Théorème 4.11 *Soit $G = (V, E)$ un graphe à $n \geq 3$ sommets.*

$$\pi(G, AA, 2) \leq \max \left\{ 2\sqrt{6}e \cdot \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \cdot \pi(G), \frac{2}{\ln 2} \cdot \ln n \right\}$$

3.5.2 Premières bornes

G est un graphe quelconque d'ordre n , de degré maximum Δ . Nous établissons ici un état de l'art des bornes trouvées dans la littérature sur la charge en fonction du nombre de sauts ou sur le nombre de sauts en fonction de la capacité valables pour toute topologie, d'abord dans le cas d'une instance de communication quelconque, puis dans les cas particuliers du type one-to-all puis all-to-all.

Notons que les constructions données pour les arbres quelconques dans les sections 3.6.6 et 3.6.7 donnent des bornes supérieures pour les réseaux quelconques. Il suffit en effet d'appliquer les constructions à un arbre couvrant du graphe.

Instance quelconque

Comme nous l'avons déjà annoncé dans la section 3.5.1 et comme nous le démontrons dans le chapitre 4, $2\Delta\pi(G, I, h) \geq (\Delta\pi(G, I))^{\frac{1}{h}}$. Le raisonnement est aussi présenté au chapitre 5 où une borne sur le diamètre (traduction de la borne sur la charge) est donnée. Dans [BG97], les auteurs présentent une borne similaire sur la charge sans la relier clairement à l'indice de transmission. Ainsi, on trouve le théorème suivant :

Théorème 3.5 ([BG97, BBGG00], Borne Inférieure) *Soit une coupe-arête C et N_c le nombre de requêtes de connexion de I séparées par C . En comptant le nombre de connexions de longueur au plus h qui peuvent emprunter un chemin virtuel donné on trouve que la charge est au moins :*

$$\Delta\pi(G, I, h) \geq \left(\frac{\Delta}{4h} \frac{N_c}{|C|} \right)^{\frac{1}{h}}$$

Diffusion

Les auteurs montrent alors diverses bornes dans des cas particuliers.

Corollaire 3.6 (du théorème 3.5 [BBGG00]) *Quel que soit le sommet choisi comme initiateur, en prenant comme coupe l'ensemble des arêtes autour de l'initiateur on trouve :*

$$\Delta\pi(G, \partial A, h) > \left(\frac{n-1}{4h} \right)^{\frac{1}{h}}$$

Corollaire 3.7 *Comme, pour $n \geq 3$ et $h \geq 3$, $(1/h)^{1/h} > 1/2$ et $((n-1)/4)^{1/h} > n^{1/h}/2$, on peut simplifier l'expression en :*

$$\Delta\pi(G, \partial A, h) > \frac{n^{\frac{1}{h}}}{4}$$

Ce théorème montre en particulier que la construction dans les arbres du théorème 3.39 en $n^{\frac{1}{h}}$ donne le bon ordre de grandeur.

Échange total

DÉFINITION. Soit $K > 0$. On dit que G est K -séparable s'il existe une coupe-arête de G de cardinalité au plus K telle que X et Y sont de taille au plus $\frac{2}{3}n$, et que chacun des sous-graphes de G engendrés par X et Y respectivement est K -séparable.

Corollaire 3.8 (du théorème 3.5 [BBGG00] , Borne Inférieure) *Si G est un graphe planaire alors,*

$$\Delta\pi(G, AA, h) = \Omega\left((\Delta n^3)^{\frac{1}{2h}}\right)$$

En effet, un graphe planaire est $2\sqrt{2\Delta n}$ -séparable, [LT79].

DÉFINITIONS.

Une *décomposition en arbres* d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est une paire (X, T) , où $T = (V(T), E(T))$ est un arbre et $X = \{X_p \subset V(G) \mid p \in V(T)\}$ est une famille de sous-ensembles de $V(G)$, une pour chaque nœud de T telle que :

- $\cup_{p \in V(T)} X_p = V(G)$;
- $\forall (u, v) \in E(G), \exists p \in V(T)$ tel que u et $v \in X_p$;
- $\forall p, q, r \in V(T)$, si q est sur le chemin entre p et r alors $X_p \cap X_r \subset X_q$.

Étant donnée une décomposition en arbres (X, T) d'un graphe G , la *largeur* (*width*) de (X, T) est $\max_{p \in V(T)} \{|X_p| - 1\}$. L'*arbre-largeur* (*tree-width*) de G est le minimum de l'ensemble des largeurs sur toutes les décompositions en arbres de G .

Théorème 3.9 ([BBGG00], Borne Inférieure) *Si G est un graphe d'arbre-largeur bornée alors,*

$$\pi(G, AA, h) = \Omega\left(\frac{1}{\Delta} \cdot n^{\frac{2}{h}}\right)$$

Ce théorème montre en particulier que la construction dans les arbres du théorème 3.25 en $n^{\frac{2}{h}}$ donne le bon ordre de grandeur. On voit que toutes les bornes inférieures données dans [BBGG00] sont des conséquences directes de la relation $\Delta\pi(G, I, h) \geq \left(\frac{\Delta}{4h} \frac{N_c}{|C|}\right)^{\frac{1}{h}}$. Il est à présent intéressant de trouver des constructions se rapprochant de la borne.

Théorème 3.10 (D'après [CGZ96a], Construction) *Si G est K -séparable alors,*

$$\pi(G, AA, h) \leq \frac{K \cdot h}{2 \left(1, 5^{\frac{2}{h}} - 1\right)} \cdot n^{\frac{2}{h}} \leq \frac{3}{2} \cdot K \cdot h^2 \cdot n^{\frac{2}{h}}$$

On voit que pour un graphe planaire, $2\sqrt{2\Delta n}$ -séparable, ce théorème donne une borne en $h^2 \cdot n^{\frac{1}{2} + \frac{2}{h}}$. Pour un graphe quelconque, en appliquant la construction donnée pour les arbres et une instance de one-to-all au théorème 3.39 on trouve :

Théorème 3.11 ([CGZ96a], Construction)

$$\pi(G, AA, h) \leq \sqrt{h} \cdot n^{1 + \frac{1}{h}}$$

Concernant le diamètre, différentes versions de la borne existent mais toutes les bornes inférieures sont calculées par la même méthode. La plus simple est calculée en remarquant que le graphe virtuel est de degré au plus $c\Delta$ et en appliquant la borne de Moore suivante :

Théorème 3.12 (Voir par exemple [dR94]) *Soit $n(\Delta, D)$ le nombre maximum de sommets d'un graphe de degré maximum Δ et de diamètre D . On a la borne de Moore :*

$$n(2, D) \leq 2D + 1 \quad \text{et}$$

$$n(\Delta, D) \leq \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2} \quad \text{pour } \Delta \geq 3$$

Corollaire 3.13 ([KKP97], Borne Inférieure) *En appliquant la borne de Moore sur le graphe virtuel on trouve :*

$$D(G, AA, c) \geq \frac{\log n}{\log(c\Delta)} - 1$$

Au chapitre 5, page 123, nous trouvons une borne plus fine en comptant le nombre de routes qui empruntent un chemin virtuel (c'est le même calcul qu'au chapitre 4, présenté différemment) :

Proposition 5.25

$$D(G, AA, c) \geq \frac{\log \pi(G)}{\log(c\Delta)} + O(\log D(G, AA, c))$$

Théorème 3.14 ([SV96]) *Pour tout G de degré $\Delta \geq 3$,*

$$D(G, AA, c) = \Theta\left(\frac{D_G \log \Delta}{\log c}\right)$$

En particulier, si G est de degré borné, on a :

$$D_G = O(\log n) \implies D(G, AA, c) = \Theta\left(\frac{\log n}{\log c}\right)$$

Dans le chapitre 5, page 124, on trouve la démonstration du théorème suivant, sorte de réciproque du précédent :

Proposition 5.26 *Si G est de degré borné avec $\log D_G = \Omega(\log n)$, on a :*

$$D(G, \mathcal{A}\mathcal{A}, c) = \Theta(\log n) \implies c = \Omega\left(\frac{D_G \cdot \log n}{n}\right)$$

En particulier, si c est constant

$$D(G, \mathcal{A}\mathcal{A}, c) = \Theta(\log n) \implies D_G = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

Remarquons qu'on a toujours $D(G, \mathcal{A}\mathcal{A}, 1) \geq D_G$.

Nous avons étudié le cas où le graphe possède des arbres couvrants arêtes disjoints et avons ainsi établi le théorème suivant, démontré dans le chapitre 4, page 81 :

Théorème 4.16 *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté symétrique tel que le graphe non orienté sous-jacent possède t arbres couvrants deux à deux arêtes disjoints alors :*

$$\vec{D}(G, \mathcal{A}\mathcal{A}, c) \leq 10tcn^{\frac{1}{2tc-1}}.$$

Corollaire 4.17 *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté symétrique d'arc-connexité λ alors*

$$\vec{D}(G, \mathcal{A}\mathcal{A}, c) \leq 10tcn^{\frac{1}{2tc-1}}.$$

où $t = \lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor$.

Nous avons établi, page 82, un résultat plus précis pour le cas particulier d'arc-connexité 2, capacité 1 :

Théorème 4.19 *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté symétrique à n sommets et d'arc-connexité 2, on a :*

$$\vec{D}(G, \mathcal{A}\mathcal{A}, 1) \leq 6 \cdot n^{\frac{2}{3}}$$

3.6 Réseaux particuliers

3.6.1 Le chemin

Lorsqu'on étudie une classe de graphes comme par exemple le chemin ou le cycle, il peut être intéressant de maximiser le nombre de sommets en fonction de

la capacité et du nombre de sauts autorisés. Pour $I = \text{OA}$ une instance du type one-to-all ou $I = \text{AA}$, pour une famille de graphes F_n indicée par un entier, on note ce paramètre $n_I(F, h, c)$. Formellement :

$$n_I(F, h, c) = \max \{n \mid \pi(F_n, I, h) \leq c \text{ et } D(F_n, I, c) \leq h\}$$

Dans [FNP97] par exemple, seule cette notion de *nombre maximal de sommets* est abordée. On trouve aussi ce paramètre dans [GWZ95], [DFZ97] et [Cho99].

Il n'est pas toujours facile de traduire les bornes sur n en fonction de h et c en bornes sur π (resp. D) en fonction de n et D (resp. π). Pour permettre de comparer les différents résultats, nous traduisons systématiquement les bornes données dans les articles en bornes sur π et D . Néanmoins, dans un esprit de lisibilité, nous présentons aussi les bornes sur n .

Diffusion

Les articles [DFZ97] et [FZ97] traitent exclusivement du chemin avec une instance de communication OA du type one-to-all. Le premier propose des constructions optimales, le second montre comment on peut transformer un VPL de charge c et d'excentricité h en un VPL de charge h et d'excentricité c . Un VPL dans le chemin avec l'instance OA correspond en effet au plongement d'un arbre dans le chemin où la congestion du plongement est la charge du VPL. Dans [FZ97] on trouve une construction de l'arbre dual. Étant donné un VPL sur le chemin de charge c et d'excentricité h , les auteurs construisent un VPL de charge h et d'excentricité c . Il en résulte que les bornes sur π en fonction de h se transforment facilement en bornes sur D en fonction de c et réciproquement.

L'article [GWZ95], présenté page 59, étudie aussi ce problème en lui imposant une contrainte supplémentaire.

L'initiateur est *a priori* l'une des extrémités du chemin. On peut symétriser les constructions en prenant comme initiateur le centre du chemin et en appliquant les constructions de chaque côté. Une construction sur n sommets, de charge c et d'excentricité h par rapport à une extrémité du chemin fournit une construction sur $2n - 1$ sommets avec même charge et d'excentricité h par rapport au centre du chemin.

La construction d'un VPL dans le chemin non orienté pour une instance de communication one-to-all revient à plonger un arbre enraciné en l'initiateur dans le chemin. La figure 3.2 explique la construction récursive de l'arbre. En construisant l'arbre dans l'espace de dimension c en ne s'éloignant pas à une distance l_1 plus grande que h de l'origine, on construit un arbre de taille $n_{\text{OA}}(P, h, c)$ de profondeur h et qui se plonge dans le chemin avec charge c . Sa taille est exactement le nombre $B(h, c)$ défini ainsi :

DÉFINITION. $B(h,c)$ est le nombre de sommets entiers dans la boule de dimension c et de rayon h pour la distance l_1 (longueur du plus court chemin dans la grille) représentée sur la figure 3.1.

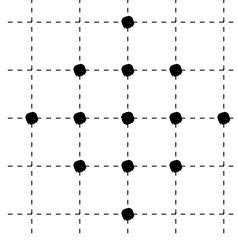
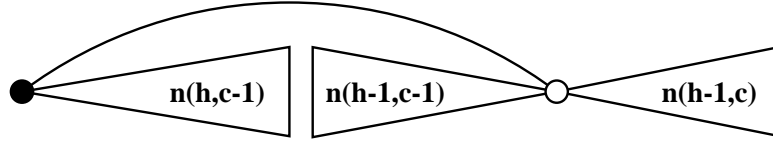


FIG. 3.1 – La boule de rayon 2 en dimension 2

Théorème 3.15 ([DFZ97], page 178) *Si \mathcal{OA} est l'instance de communication one-to-all avec l'initiateur au milieu du chemin alors :*

$$n_{\mathcal{OA}}(P,h,c) = B(h,c)$$

Ce résultat est d'abord obtenu pour une instance de communication \mathcal{OA}' avec l'initiateur à une extrémité du chemin. On trouve alors $n_{\mathcal{OA}'}(P,h,c) = \frac{B(h,c)}{2} - \frac{1}{2}$. En effet, si n , h et c sont tels que $\frac{B(h,c-1)}{2} - \frac{1}{2} < n \leq \frac{B(h,c)}{2} - \frac{1}{2}$ alors $D(P_n, \mathcal{OA}', c) = h$ et $\pi(P_n, \mathcal{OA}', h) = c$. Un travail antérieur de ces auteurs dans le cas plus contraint d'un facteur d'étirement 1 est présenté en fin de chapitre, page 58.



$$\mathbf{n}(\mathbf{h},\mathbf{c}) = \mathbf{n}(\mathbf{h},\mathbf{c}-\mathbf{1}) + \mathbf{n}(\mathbf{h}-\mathbf{1},\mathbf{c}-\mathbf{1}) + \mathbf{n}(\mathbf{h}-\mathbf{1},\mathbf{c}) - \mathbf{1}$$

FIG. 3.2 – [DFZ97] Établissement de la récurrence sur la taille optimale des arbres

La valeur exacte de $B(h,c)$ est :

Proposition 3.16 ([GW70])

$$B(h,c) = \sum_{j=0}^{\min(c,h)} 2^j \binom{h}{j} \binom{c}{j}$$

On remarque que $B(h,c) = B(c,h)$, ce qui implique la symétrie des bornes sur h en fonction de c et des bornes sur c en fonction de h . Cette remarque a conduit les auteurs de [FZ97] à chercher une construction de l'arbre dual.

On note $R(c,n)$ le minimum des rayons des boules de dimension c contenant au moins n sommets. Des encadrements classiques de $B(h,c)$ et de $R(c,n)$, rappelés dans [DFZ97], permettent d'établir les résultats suivants :

Corollaire 3.17 *Avec l'initiateur au milieu, on trouve $D(P_n, \partial A, c) = R(c,n)$. Donc, d'après les encadrements classiques de $R(c,n)$ on trouve :*

$$\frac{1}{2} \cdot (c! \cdot n)^{\frac{1}{c}} - \frac{c}{2} \leq D(P_n, \partial A, c) \leq \frac{1}{2} \cdot (c! \cdot n)^{\frac{1}{c}} + 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot n^{\frac{1}{c}} - \frac{1}{2} \leq D(P_n, \partial A, c) \leq \frac{c}{2} \cdot n^{\frac{1}{c}} + 1$$

$$\frac{\log n}{\log(2c+1)} \leq D(P_n, \partial A, c)$$

Corollaire 3.18 *D'après la remarque sur la construction de l'arbre dual, on peut retourner les bornes et énoncer :*

$$\frac{1}{2} \cdot (h! \cdot n)^{\frac{1}{h}} - \frac{h}{2} \leq \pi(P_n, \partial A, h) \leq \frac{1}{2} \cdot (h! \cdot n)^{\frac{1}{h}} + 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot n^{\frac{1}{h}} - \frac{1}{2} \leq \pi(P_n, \partial A, h) \leq \frac{h}{2} \cdot n^{\frac{1}{h}} + 1$$

$$\frac{\log n}{\log(2h+1)} \leq \pi(P_n, \partial A, h)$$

Échange total

On a déjà dit page 40 que $\pi(P_n, \mathbf{AA}, 1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ [HMS89] et il est facile de voir que $\pi(P_n, \mathbf{AA}, 2) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Le théorème 4.3 nous apprend donc que $\pi(P_n, \mathbf{AA}, h) \geq \frac{1}{4} \left(\frac{n^2}{2} \right)^{1/h}$ mais S. Choplin a calculé plus précisément les constantes :

Théorème 3.19 ([Cho99])

$$\begin{aligned} \pi(P_n, \mathbf{AA}, 3) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3n}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot (1 + o(1)) \\ \pi(P_n, \mathbf{AA}, 4) &= \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + o(1)) \\ \pi(P_n, \mathbf{AA}, 5) &= \left(\frac{15 \cdot n}{3 - \sqrt{3}} \right)^{\frac{2}{5}} \cdot (1 + o(1)) \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout h fixé, il existe une constante $\alpha(h)$ telle que :

$$\pi(P_n, AA, h) = \left(\frac{n}{\alpha(h)} \right)^{\frac{2}{h}} \cdot (1 + o(1))$$

Théorème 3.20 ([KKP97])

$$\sqrt{2n} - 5 < D(P_n, AA, 2) < \sqrt{2n} + 2$$

et

$$\frac{1}{2}n^{\frac{1}{c}} < D(P_n, AA, c) < c \cdot n^{\frac{1}{c}}$$

pour tout $c \geq 1$.

D'après le corollaire 3.17 et le théorème 3.3, on trouve des bornes pour l'instance all-to-all à partir des bornes sur l'instance one-to-all avec l'initiateur au milieu :

Corollaire 3.21 ([DFZ97], page 180)

$$\frac{1}{2} \cdot (c! \cdot n)^{\frac{1}{c}} - \frac{c}{2} \leq D(P_n, AA, c) \leq (c! \cdot n)^{\frac{1}{c}} + 2$$

$$\frac{1}{2} \cdot n^{\frac{1}{c}} - \frac{1}{2} \leq D(P_n, AA, c) \leq c \cdot n^{\frac{1}{c}} + 2$$

$$\frac{\log n}{\log(2c + 1)} \leq D(P_n, AA, c)$$

Théorème 3.22 ([SV96])

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } c \geq \log^{1+\epsilon} n \implies D(P_n, AA, c) = \Theta\left(\frac{\log n}{\log c}\right).$$

3.6.2 Le chemin orienté

Échange total

Nous démontrons au chapitre 4, page 83, que la valeur du diamètre virtuel optimal sur le chemin orienté de capacité 1 est encadrée par les deux valeurs suivantes, égales à un près :

Théorème 4.20

$$\left\lceil \frac{n}{2} + \log_2 n - 2,6 + 2 \cdot \frac{\log_2 n}{n} \right\rceil \leq \vec{D}(P_n, AA, 1) \leq \left\lceil \frac{n}{2} + \log_2 n - 2,6 + 2 \cdot \frac{\log_2 n}{n} \right\rceil + 1$$

Nous étudions le cas général au chapitre 5, page 110 :

Proposition 5.12

$$\frac{n^{\frac{1}{2c-1}}}{2} \leq \vec{D}(P_n, AA, c) \leq 2(2c-1) \left\lceil \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{1}{2c-1}} \right\rceil - 4c + 4$$

3.6.3 Le cycle

Échange total

On a déjà dit que $\pi(C_n, AA, 1) = \left\lceil \frac{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}{2} \right\rceil$ [HMS89]. Le théorème 4.3 nous dit que $\pi(C_n, AA, h) \geq \frac{1}{4} \left(\frac{n^2}{4} \right)^{1/h}$ mais S. Choplin a montré que cette borne inférieure est serrée à un facteur multiplicatif h près et a calculé plus précisément la constante pour $h = 2$:

Théorème 3.23 ([Cho99])

$$\frac{n}{3} - 24 < \pi(C_n, AA, 2) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Et pour tout h :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{4} \right)^{\frac{1}{h}} \leq \pi(C_n, AA, h) \leq \frac{h}{4} \left(\frac{n^2}{2} \right)^{\frac{1}{h}}$$

Il existe aussi une borne sur le diamètre :

Théorème 3.24 ([ABC⁺97])

$$\frac{1}{4e} cn^{\frac{1}{c}} - \frac{c}{2} \leq D(C_n, AA, c) \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{c}} cn^{\frac{1}{c}}$$

3.6.4 Le circuit (ou cycle orienté)

Échange total

Nous démontrons au chapitre 5, page 104, que :

Proposition 5.1

$$\frac{n^{\frac{1}{2c}}}{2} \leq \vec{D}(C_n, AA, c) < 4c \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{2c}} + 1$$

Remarquons qu'en utilisant le théorème 3.24 et la remarque page 42 on transforme la borne inférieure en non orienté en une borne inférieure en orienté plus fine de l'ordre de $cn^{\frac{1}{2c}}$. Dans le cas particulier où $c = 1$ on obtient, page 107, un meilleur résultat :

Proposition 5.5

$$2\sqrt{2n} - O(1) \leq \vec{D}(C_n, AA, 1) < 2\sqrt{2n} + 1$$

3.6.5 Les arbres k -aires complets orientés ou non

$T(k, h)$ désigne l'arbre k -aire complet de hauteur h défini page 14.

Échange total

On trouve dans le chapitre 5, page 112, le diamètre virtuel exacte à 3 unités près :

Proposition 5.13

$$2 \left\lfloor \frac{h-1}{\lfloor \log_k c \rfloor + 1} \right\rfloor + 1 \leq D(T(k, h), AA, c) \leq 2 \left\lfloor \frac{h}{\lfloor \log_k c \rfloor + 1} \right\rfloor + 2$$

La borne inférieure est valable en orienté. Les mêmes bornes serrées existent donc en orienté. La construction qui donne la borne supérieure peut s'étendre à l'arbre quelconque de degré maximum $k+1$ et de diamètre h selon la démarche expliquée dans [SV96]. Cela consiste à enraciner l'arbre en un sommet de degré au plus k et à le compléter en un arbre k -aire complet de hauteur h . On prouve ainsi le théorème 3.28.

3.6.6 Les arbres

Échange total

Théorème 3.25 (D'après [CGZ96a], Construction) *En décomposant récursivement l'arbre, on trouve :*

$$\pi(T, AA, h) \leq \frac{h}{2 \left(2^{\frac{2}{h}} - 1 \right)} \cdot n^{\frac{2}{h}} \leq \frac{h^2}{4 \ln 2} \cdot n^{\frac{2}{h}}$$

Notre théorème 4.3 donne une borne inférieure sur $\pi(T, AA, h)$ en $\frac{1}{2\Delta} (\Delta \pi(T))^{\frac{1}{h}}$. Nous montrons que $\pi(T) \geq \frac{n^2}{2\Delta}$. Dans un arbre de degré Δ , il existe un sommet

x tel que les sous-arbres pendant de x sont de taille au plus $n/2$ (ils sont au plus au nombre de Δ). Il suffit pour voir cela de prendre un sommet quelconque et de se déplacer le long de l'arête qui relie ce sommet au sous-arbre de taille supérieure à $n/2$ s'il existe. Le plus gros des sous-arbres pendant de x (noté T_1) est de taille supérieure à n/Δ . Donc la charge de l'arête reliant T_1 à x est supérieure à $\frac{n}{\Delta} \times (n - \frac{n}{\Delta}) \geq \frac{n^2}{2\Delta}$. Donc si T est un arbre de degré au plus Δ on a $\pi(T) \geq \frac{n^2}{2\Delta}$. Ce qui donne une borne sur $\pi(T, \mathbf{AA}, h)$:

Théorème 3.26 (Borne Inférieure)

$$\pi(T, \mathbf{AA}, h) \geq \frac{1}{2\Delta} \frac{n^2}{2}^{\frac{1}{h}}$$

En 96, une borne similaire (moins bonne pour la constante) avait été établie par une méthode itérative :

Théorème 3.27 (D'après [CGZ96a], Borne Inférieure)

$$\pi(T, \mathbf{AA}, h) \geq \frac{1}{\Delta} \cdot \left(\frac{n^2}{8h} \right)^{\frac{1}{h}} \geq \frac{1}{2\Delta} \cdot \left(\frac{n^2}{8} \right)^{\frac{1}{h}}$$

Théorème 3.28

$$D(T, \mathbf{AA}, c) \leq 2 \left\lceil \frac{D_T}{\lceil \log_{\Delta-1} c \rceil + 1} \right\rceil + 2$$

3.6.7 Les arbres orientés

Échange total

En utilisant la construction sur le cycle du théorème 5.1 on trouve une première borne supérieure, démontrée au chapitre 5, page 114 :

Proposition 5.15

$$\vec{D}(T, \mathbf{AA}, c) \leq \vec{D}\left(C_{2n-2}, \mathbf{AA}, \frac{c}{2}\right) \leq 2c(n-1)^{\frac{1}{c}} + 1$$

Grâce à une construction plus complexe utilisant les ensembles dominants on obtient une meilleure borne supérieure, page 116 :

Proposition 5.19

$$\vec{D}(T, \mathbf{AA}, c) \leq 10c \, n^{\frac{1}{2c-1}}$$

En décomposant récursivement l'arbre on trouve aussi, page 117 :

Proposition 5.21

$$\vec{D}(T, AA, c) \leq \vec{D}(P_{D_T}, AA, c) \cdot \log n = O \left(c \cdot D_T^{\frac{1}{2c-1}} \cdot \log n \right)$$

En utilisant la borne inférieure donnée pour le chemin au théorème 5.12, on trouve, page 114 :

Proposition 5.14

$$\vec{D}(T, AA, c) \geq \vec{D}(P_{D_T}, AA, c) \geq \frac{D_T^{\frac{1}{2c-1}}}{2}$$

3.6.8 La grille et le tore

Soient a et b deux entiers avec $a \leq b$. $TM(a, b)$ (resp. $M(a, b)$) désigne la grille torique (*toroidal mesh*) (resp. la grille) de dimension 2, c'est-à-dire le produit cartésien de deux cycles $C_a \square C_b$ (resp. de deux chemins $P_a \square P_b$).

Échange total

Théorème 3.29 ([BBGG00], Borne Inférieure)

$$\pi(M(a, b), AA, h) = \Omega \left((ab^2)^{\frac{1}{h}} \right)$$

Pour la grille carrée $a = b = \sqrt{n}$, cette borne inférieure est celle donnée pour les graphes planaires au théorème 3.8. De plus, comme $\pi(M(a, b)) = ab^2$, ce théorème est un corollaire de notre théorème 4.3.

On trouve dans [CGZ96a] une borne supérieure de l'ordre de $h^2 \cdot n^{\frac{2}{h}}$ pour la grille carrée de côté \sqrt{n} mais elle a été améliorée depuis :

Théorème 3.30 ([BBGG00], Construction) *La construction présentée dans la grille carrée donne :*

$$\pi(M(\sqrt{n}, \sqrt{n}), AA, h) \leq 2 \left(\frac{h}{3} + 1 \right) n^{\frac{3}{2h}}$$

Théorème 3.31 ([KKP97]) *Si a et c sont des constantes on a :*

$$D(M(a,b),AA,c) = \Theta\left(n^{\frac{1}{ac}}\right)$$

Théorème 3.32 ([KKP97]) *Dans la grille carrée, pour c borné on a :*

$$D(M(n,n),AA,c) = \Theta(\log n)$$

On montre au chapitre 5, page 120, que, plus généralement, pour une grille $M(a,b)$ avec $\lceil \log_2 b \rceil \leq a \leq b$, on a :

Proposition 5.24

$$D(M(a,b),AA,1) = \Theta(\log n)$$

Ce résultat est *a fortiori* vrai pour c borné.

Théorème 3.33 ([SV96]) *Dans la grille carrée, pour $c \geq 2$ quelconque,*

$$D(M(n,n),AA,c) = \Theta\left(\frac{\log n}{\log c}\right)$$

Théorème 3.34 ([SV96]) *Dans l'hypercube de dimension d $H_d = TM(2)^d$ on trouve :*

$$D(H_d,AA,c) = \begin{cases} \Theta\left(\frac{d}{\log d}\right) = \Theta\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right) & \text{si } 2 \leq c \leq d, \\ \Theta\left(\frac{d}{\log c}\right) = \Theta\left(\frac{\log n}{\log c}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

3.6.9 La grille et le tore orientés

Échange total

En s'inspirant de la construction optimale sur le cycle on trouve, page 119, un VPL sur la grille torique qui donne :

Proposition 5.22

$$\vec{D}(TM(a,b),AA,c) \leq 4(2c-1) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2c-1}} + 4ac \left(\frac{b}{2}\right)^{1/2ac} + 2a + 1$$

Cette borne, démontrée au chapitre 5 est intéressante lorsque $a < \log b$. En effet, si $b \geq a \geq \log b$, la borne en $\log n$ donnée pour la grille convient pour le tore.

3.7 D'autres contraintes sur le VPL

3.7.1 VPL avec facteur d'étirement fixé

Le facteur d'étirement (*stretch factor*) est le rapport entre la longueur du chemin effectivement emprunté pour router une information dans le réseau de chemins virtuels entre deux sommets et la distance physique entre ces deux sommets. Certains travaux (comme par exemple [CGZ94], [GWZ95], [FNP97] ou [GWZ98]) s'imposent la contrainte de construire des VPL dont le facteur d'étirement vaut 1. Fixer le facteur d'étirement à 1 impose que les connexions se fassent le long des plus courts chemins dans le graphe physique. Lorsque les VPL sont construits avec la contrainte *facteur d'étirement égal à 1*, on notera les bornes avec un indice 1, i.e. π_1 et D_1 . Formellement, on définit le facteur d'étirement d'une connexion r de x à y établie le long des chemins virtuels VP_1, VP_2, \dots, VP_k par

$$\sigma(G, H, \mathcal{P}, r) = \frac{\sum_{i=1}^k l(VP_i)}{d_G(x, y)}$$

(où $l(VP_i)$ désigne la longueur dans G du chemin virtuel VP_i) et le facteur d'étirement d'un VPL par

$$\sigma(G, H, \mathcal{P}, I) = \max_{r \in I} \sigma(G, H, \mathcal{P}, r)$$

Cette contrainte supplémentaire permet de simplifier le problème en imposant la forme des connexions. Un problème \mathcal{NP} -complet peut devenir polynomial lorsqu'on impose un facteur d'étirement borné. Nous ne considérons pas cette notion dans les travaux présentés dans les chapitres suivants et les constructions optimales que nous trouvons sont le plus souvent de facteur d'étirement supérieur à 1.

La complexité du problème ainsi contraint est plus facile à aborder que dans le cas général. Aussi, dans [EFZ97] la complexité du problème de l'existence d'un VPL avec facteur d'étirement fixé est traitée dans le cas particulier d'une instance OA de type one-to-all et facteur d'étirement 1.

PROBLÈME D, de l'existence d'un VPL avec facteur d'étirement fixé

Données : un graphe G , une instance I de requêtes dans G , et f , h et c trois entiers

Question : existe-t-il un VPL avec facteur d'étirement au plus f réalisable sur le graphe G avec l'instance de connexion I , et les contraintes de charge c et de nombre de sauts h ?

Théorème 3.35 ([EFZ97])

Le problème D est \mathcal{NP} -complet, même pour $I = OA$, du type one-to-all, $f = 1$, et h et c fixés (sauf pour $h = 1$ et $(h, c) = (2, 1)$).

Pour $I = \mathcal{OA}$ et $f = 1$ le problème D est soluble en temps polynomial pour $h = 1$ et c fixés, et pour $(h, c) = (2, 1)$.

charge sauts	1	2	3	...
1	P	P	P	...
2	P	\mathcal{NP}	\mathcal{NP}	...
3	\mathcal{NP}	\mathcal{NP}
...	\mathcal{NP}

FIG. 3.3 – Complexité du problème D avec facteur d'étirement 1 en one-to-all

Remarquons que le cas $h = 1$ correspond à un problème de simple flot entier par les plus courts chemins. On sait que lorsque la longueur des chemins est bornée, le problème est \mathcal{NP} -complet. Le résultat présent annonce que le problème est polynomial pour les plus courts chemins.

Le travail de construction de l'arbre dual dans le chemin présenté page 49 est d'abord étudié dans [FZ97] avec facteur d'étirement 1 puis dans le cas général.

L'article [GWZ95] présente des constructions optimales dans le chemin en terme de charge et excentricité maximales avec facteur d'étirement 1. Des bornes sur la charge et l'excentricité moyennes sont calculées, le lecteur intéressé pourra consulter directement l'article.

Théorème 3.36 ([CGZ94], Construction) *Soit \mathcal{OA} l'instance de communication du type one-to-all avec l'initiateur à l'une des extrémités du chemin. En imposant aux VPL un facteur d'étirement de 1, on obtient :*

$$\pi_1(P_n, \mathcal{OA}, h) \leq h \cdot n^{\frac{1}{h}}$$

Corollaire 3.37 *D'après la remarque page 49 à propos de l'arbre dual, on a*

$$D_1(P_n, \mathcal{OA}, c) \leq c \cdot n^{\frac{1}{c}}$$

Théorème 3.38 ([GWZ95]) *Avec un facteur d'étirement de 1, on trouve que si n , h et c sont tels que*

$$\binom{c+h-1}{c} < n \leq \binom{c+h}{c}$$

alors $D_1(P_n, \mathcal{OA}, c) = h$ et $\pi_1(P_n, \mathcal{OA}, h) = c$. En d'autres termes, on a :

$$n_{1, \mathcal{OA}}(P, h, c) = \binom{c+h}{c}$$

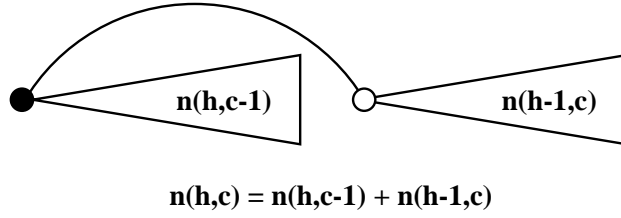


FIG. 3.4 – [GWZ95] Établissement de la récurrence avec facteur d'étirement 1

Diffusion dans les arbres

Théorème 3.39 ([CGZ96a], Construction) *Soient T un arbre à n sommets et $h \geq 1$, alors*

$$\pi_1(T, \partial A, h) \leq h \cdot n^{\frac{1}{h}}$$

Théorème 3.40 ([CGZ96a], Borne Inférieure) *Soient T un graphe à n sommets de degré borné par Δ , et $h \geq 2$, alors*

$$\pi_1(T, \partial A, h) \geq \frac{1}{\Delta} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{h}}$$

3.7.2 VPL avec charge sur les sommets minimale

Chaque chemin virtuel utilise une entrée dans la table de routage de chacun des sommets qu'il traverse, que le sommet soit une extrémité ou un nœud intermédiaire du chemin. Comme la taille des tables de routage est bornée par le standard ATM à 4096 entrées, cette ressource doit être distribuée avec modération. Aussi, dans [GZ94] et [CGZ96b] la *charge d'un sommet* est définie comme le nombre de chemins virtuels qui traversent ce sommet. La complexité du problème y est traitée.

Dans [FNP97], la charge des nœuds est aussi étudiée mais avec une définition différente. Avançant l'argument que les tables des VC sont lues uniquement à la fin des VP, les auteurs cherchent à mesurer la taille de ces tables en calculant la *charge d'un sommet* comme le nombre de chemins virtuels ayant ce sommet comme extrémité et la *charge d'une arête* comme le nombre de chemins virtuels débutant ou finissant par cette arête en un sommet donné. Le problème de calculer ces charges pour une instance du type one-to-all avec facteur d'étirement 1 est étudié. La complexité du problème de l'existence d'un VPL pour une charge et une excentricité données est d'abord traitée. Les auteurs calculent nombre maximal de sommets possible dans une classe de graphes donnée pour que le graphe admette un VPL de charge et excentricité fixées. Des explications sur ce paramètre *nombre maximal de sommets* sont données au début de la section 3.6.1. Les classes chemins, cycles et grilles sont étudiées.

Le paramètre *charge* désigne ici la charge sur les arêtes définie dans [FNP97]. On peut alors énoncer le problème suivant :

**PROBLÈME E, de l'existence d'un VPL
avec facteur d'étirement fixé**

Données : un graphe G , une instance I de requêtes dans G , et f , h et c trois entiers

Question : existe-t-il un VPL avec facteur d'étirement au plus f réalisable sur le graphe G avec l'instance de connexion I , et les contraintes de charge c et de nombre de sauts h ?

Si, à présent, la charge désigne la charge sur les sommets définie dans [FNP97], on appelle le problème **PROBLÈME F**.

On peut alors énoncer les résultats démontrés dans l'article :

Théorème 3.41 ([FNP97])

Le problème E est \mathcal{NP} -complet même pour $I = \emptyset A$, du type one-to-all, $f = 1$, et h et c fixés (sauf pour $h = 1$ et $(h, c) = (2, 1)$).

Pour $I = \emptyset A$ et $f = 1$, le problème E est soluble en temps polynomial pour $h = 1$ et c fixé, et pour $(h, c) = (2, 1)$.

Le problème F est \mathcal{NP} -complet même pour $I = \emptyset A$, $f = 1$, et $h \geq 2$ fixé ou même pour $I = \emptyset A$, $f = 1$, et $c \geq 3$ fixé.

Pour $I = \emptyset A$ et $f = 1$, le problème F est soluble en temps polynomial pour $h = 1$. Il est aussi soluble en temps polynomial pour $c = 1$ ou 2.

Pour $I = \emptyset A$, $f = 1$, h et c fixés, le problème E restreint aux graphes de degré maximum Δ est soluble en temps polynomial

Soient $a(h, c)$ le nombre maximum de sommets dans un graphe de la classe considérée tel que ce graphe admette un VPL d'excentricité h et de charge sur les arêtes c et $s(h, c)$ ce nombre pour l'excentricité h et la charge sur les sommets c . Nous résumons les résultats de cet article dans le tableau 3.7.2.

Classe	$a(h,c)$	$s(h,c)$
P_n	$\frac{c^{h+1}-1}{c-1}$	$\frac{c(c-1)^h-2}{c-2}$
C_n	$2 \cdot \frac{c^{h+1}-1}{c-1} - 1$	$\frac{c(c-1)^h-2}{c-2}$ si c est pair $1 + \frac{(c-1)^{h+1}-1}{c-2}$ si c est impair
$M(a,a)$	pour $c = 1$ $\begin{cases} h^2 & \text{si } h \leq 3 \\ (h+1)^2 & \text{sinon} \end{cases}$ pour $c \geq 4$ $\left\lfloor \sqrt{\frac{(2c)^{h+1}-1}{2c-1}} \right\rfloor^2$	$\left\lfloor \sqrt{\frac{c(c-1)^h-2}{c-2}} \right\rfloor^2$
$TM(a,a)$	pour $c = 1$ $\begin{cases} (2h-1)^2 & \text{si } h \leq 3 \\ (2h+1)^2 & \text{sinon} \end{cases}$ pour $c \geq 4$ $\left\lfloor \sqrt{4 \left(\frac{(2c)^{h+1}-1}{2c-1} - \frac{c^{h+1}-2c^2+4c}{c-1} \right)} \right\rfloor^2$	$\left\lfloor \sqrt{\frac{c(c-1)^h-2}{c-2}} \right\rfloor^2$

FIG. 3.5 – [FNP97] Résultats sur le nombre maximum de sommets

Bibliographie

- [ABC⁺97] William Aiello, Sandeep N. Bhatt, Fan R. K. Chung, Arnold L. Rosenberg, and Ramesh K. Sitaraman. Augmented ring networks. *J. Math. Modelling and Scientific Computing*, 1997.
- [BBGG00] Luca Becchetti, Paola Bertolazzi, Carlo Gaibisso, and Giorgio Gambosi. On the design of efficient ATM routing schemes. Une version courte est déjà publiée dans [BG97], 2000.
- [BCG97] Michel Burlet, Pascal Chanas, and Olivier Goldschmidt. Minimum diameter vp network design. In *INFORM'S FALL*, 1997.
- [BCG99] Michel Burlet, Pascal Chanas, and Olivier Goldschmidt. Virtual path layout design in ATM networks. In *INFORMS FALL '99*, 1999.
- [BG97] Luca Becchetti and Carlo Gaibisso. Lower bounds for the virtual path layout problem in ATM networks. *Lecture Notes in Computer Science*, 1338:375 – 382, 1997.
- [CCPS98] William Cook, William Cunningham, William Pulleyblank, and Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, 1998.
- [CGZ94] Israel Cidon, Ornan Gerstel, and Shmuel Zaks. A scalable approach to routing in ATM networks. In *Proc. of the 8th International Workshop on Distributed Algorithms, WDAG '94*, volume 857 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 209–222. Springer Verlag, 1994. La version longue est [CGZ96a].
- [CGZ96a] I. Cidon, O. Gerstel, and S. Zaks. The layout of virtual paths in ATM networks. In *ACM/IEEE Transaction on networking*, volume 4 – 6, pages 873 – 884, 1996. La version courte est [CGZ94].
- [CGZ96b] Israel Cidon, Ornan Gerstel, and Shmuel Zaks. Optimal virtual path layout in ATM networks with shared routing table switches. *Chicago*

- [Cha98] Pascal Chanas. *Réseaux ATM: conception et optimisation*. Thèse de doctorat, Université J. Fourier, 1998.
- [Cho99] Sébastien Choplin. Communication à diamètre fixé dans les réseaux ATM. Rapport de DEA, Université de Provence – SLOOP (projet commun CNRS/INRIA/UNSA-I3S, France, 1999.
- [DFZ97] Yefim Dinitz, Marcelo Feighlstein, and Shmuel Zaks. On optimal graphs embedded into paths and rings, with analysis using 11-spheres. In *Proc. of the 23rd Int. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG)*, volume 1335 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 171–183. Springer Verlag, 1997.
- [dR94] Jean de Rumeur. *Communications dans les Réseaux de Processeurs*. Collection Études et Recherche en Informatique. Masson, Paris, 1994.
- [EFZ97] Tamar Eilam, Michele Flammini, and Shmuel Zaks. A complete characterization of the path layout construction problem for ATM networks with given hop count and load (extended abstract). In *Proc. of the 24th International Colloquium, Automata, Languages and Programming,*, volume 1256 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 527–537. Springer Verlag, 1997.
- [EIS76] S. Even, A. Itai, and A. Shamir. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal of Computing*, 5(4):691–703, December 1976.
- [FNP97] Michele Flammini, Enrico Nardelli, and Guido Proietti. ATM layouts with bounded hop count and congestion. In *Proc. of the 11th International Workshop on Distributed Algorithms (WDAG)*, volume 1320 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 52–65. Springer Verlag, 1997.
- [FZ97] M. Feighlstein and S. Zaks. Duality in chain ATM virtual path layouts. In *Proc. of the 4th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO)*, Monte Verita, Ascona, Switzerland, July 1997.
- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Co., 1979.

- [GW70] S.W. Golomb and L.R. Welch. Perfect codes in the lee metric and the packing of polyominoes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 18:302–317, 1970.
- [GWZ95] Ornan Gerstel, Avishai Wool, and Shmuel Zaks. Optimal layouts on a chain ATM network (extended abstract). In *Proc. of the 3rd Annual European Symposium on Algorithms (ESA'95)*, volume 979 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 508–522. Springer Verlag, 1995. La version longue est [GWZ98].
- [GWZ98] Gerstel, Wool, and Zaks. Optimal layouts on a chain ATM network. *DAMATH: Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science*, 83, 1998. La version courte est [GWZ95].
- [GZ94] Ornan Gerstel and Shmuel Zaks. The virtual path layout problem in fast networks (extended abstract). In *Proc. of 13th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC'94)*, pages 235–243, USA, August 1994. ACM Press.
- [HMS89] Marie-Claude Heydemann, J.-C. Meyer, and Dominique Sotteau. On forwarding indices of networks. *Discrete Applied Mathematics*, 23:103–123, 1989.
- [Jar99] Aubin Jarry. Chemins disjoints dans les graphes symétriques. Rapport de stage de licence, ENS Lyon, 1999.
- [JF56] L. R. Ford Jr. and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian J. Math.*, 8:399–404, 1956.
- [KG96] Daniel Kofman and Maurice Gagnaire. *Réseaux haut débit*. Collection Informatiques. Paris : InterEditions, 1996.
- [KKP97] E. Kranakis, D. Krizanc, and A. Pelc. Hop-congestion trade-offs for high-speed networks. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 8:117–126, 1997.
- [LR88] Tom Leighton and Satish Rao. An approximate max-flow min-cut theorem for uniform multicommodity flow problems with application to approximation algorithms. *29th [FOCS]*, pages 422–431, 1988.
- [LT79] Richard J. Lipton and Robert Endre Tarjan. A separator theorem for planar graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 36(2):177–189, 1979.

- [MT96] Yannis Manoussakis and Zsolt Tuza. The forwarding index of directed networks. *Discrete Applied Mathematics*, 68:279–291, 1996. Research report, LRI, 641, 1991.
- [RS95] Robertson and Seymour. Graph minors. XIII. the disjoint paths problem. *JCTB: Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63, 1995.
- [RT87] Raghavan and Thompson. Randomized rounding: A technique for provably good algorithms and algorithmic proofs. *COMBINAT: Combinatorica*, 7, 1987.
- [Sol95] Patrick Solé. Expanding and forwarding. *Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science*, 58:67–78, 1995.
- [SV96] L. Stacho and I. Vrto. Virtual path layouts for some bounded degree networks. In *Proc. of the 3rd International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO)*, pages 269–278. Carleton University Press, 1996.

Chapitre 4

Positionnement des Chemins Virtuels

Ce chapitre propose des démonstrations de résultats sur la charge ou sur le nombre de sauts.

Nous établissons dans la section 4.2 des relations entre la charge pour 1 saut (qui vaut l'indice de transmission dans le cas de l'instance all-to-all) et la charge pour h sauts. Nous calculons tout d'abord une borne inférieure : $2\Delta\pi(G, I, h) \geq (\Delta\pi(G, I))^{1/h}$. Nous donnons ensuite des constructions approchant cette borne. D'abord une borne supérieure sur la charge pour 2 sauts dans le cas d'une instance de type one-to-all : $\pi(G, \text{OA}, 2) \leq 2 \cdot \sqrt{\pi(G, \text{OA}, 1)} + 1$ (valable en one-to-many) ; puis nous généralisons la démonstration pour trouver une borne supérieure sur la charge pour h sauts pour une instance de type one-to-many : $\pi(G, \text{OM}, h) \leq h \cdot \pi(G, \text{OM}, 1)^{\frac{1}{h}} + 1$; enfin, dans le cas de l'instance all-to-all, nous établissons une borne sur la charge pour 2 sauts dans les arbres : $\pi(T, \text{AA}, 2) \leq \sqrt{\pi(T)}$. Nous donnons enfin une borne dans les graphes généraux : $\pi(G, \text{AA}, 2) \leq \max \left\{ 2\sqrt{6}e \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \pi(G), \frac{2}{\ln 2} \ln n. \right\}$.

Les deux dernières sections traitent, dans les graphes orientés, du cas **AA** et présentent des bornes sur le diamètre virtuel en fonction de la charge. Dans la section 4.3, on trouve des bornes supérieures sur le diamètre virtuel en fonction de l'arc-connexité et la sous-section 4.3.2 étudie le cas particulier où l'arc-connexité vaut 2 et la charge 1. Enfin, nous étudions dans la section 4.4 le cas particulier du chemin orienté avec capacité 1 et trouvons la valeur exacte (à une unité près) du diamètre virtuel en fonction du nombre de sommets.

Rappelons qu'un VPL sur un graphe G est désigné par le couple (H, \mathcal{P}) où H est le graphe virtuel et \mathcal{P} son plongement dans le graphe physique G .

4.1 Le problème du flot entier

Avant d'entreprendre les démonstrations de la section suivante, il nous faut introduire le vocabulaire de la théorie des flots ainsi que quelques résultats classiques.

DÉFINITIONS. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté muni de deux points distingués s (la source) et p (le puits). Soit $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction qui associe à chaque arc de G un nombre réel positif ou nul appelé capacité de l'arc.

Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est un $s - p$ *flot* dans (G, c) si elle satisfait les propriétés suivantes :

- (i) $\sum_u f(u, v) = \sum_w f(v, w)$ pour tout v de $V - \{s, p\}$ tels que (u, v) et $(v, w) \in E$ (conservation du flot) et,
- (ii) $f(u, v) \leq c(u, v)$ pour tout $(u, v) \in E$.

On appelle *valeur du flot* f la quantité de flot qui sort de la source et qui arrive au puits soit $\sum_u f(s, u)$ (égale par conservation du flot à $\sum_u f(u, p)$).

On sait qu'il existe toujours un $s - p$ flot maximal. De plus, la valeur du $s - p$ flot maximal et de la $s - p$ coupe minimale (voir définition d'une coupe page 40) sont égales comme l'énonce le théorème suivant (démontré par exemple dans [LP86]) :

Théorème 4.1 (Théorème Max-Flot Min-Cut [FF56, FF62]) *Soit G un graphe orienté muni d'une source s , d'un puits p et d'une fonction de capacité sur ses arcs, la valeur maximale d'un $s - p$ flot est égale à la valeur minimale d'une $s - p$ coupe.*

Concernant les flots entiers, on sait que :

Théorème 4.2 (Théorème du flot entier [FF62]) *Si les capacités sont entières alors il existe un flot maximum dont la valeur est entière sur chaque arc.*

Remarquons qu'un $s - p$ flot entier de valeur f qui passe sur un graphe de capacité uniforme c correspond à un ensemble de f chemins de s à p induisant une charge au plus c sur les arêtes du graphe. Considérons à présent une instance de connexion du type one-to-many entre l'initiateur s et le sous-ensemble de sommets V' . Considérons le graphe G' dont l'ensemble des sommets est $V \cup \{p\}$ et l'ensemble des arêtes est $E \cup \{[y, p] \mid y \in V'\}$ et la capacité sur les arêtes est c si $e \in E$ et 1 pour les arêtes de type $[y, p]$. Construire un VPL en 1 saut entre s et V' respectant la charge c revient à construire un $s - p$ flot de valeur $|V'|$. Le calcul de $\pi(G, \text{OM}, 1)$ où OM est une instance de type one-to-many est donc un problème de flot entier.

4.2 Bornes sur la charge

4.2.1 Borne Inférieure

Si G est non orienté, Δ est le degré maximal. Si G est orienté, Δ est le degré maximal sortant.

Théorème 4.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe de degré maximal Δ , I une instance de connexion et h un entier non nul, on a :*

$$2\Delta\pi(G, I, h) \geq (\Delta\pi(G, I))^{\frac{1}{h}}$$

PREUVE. Le calcul est similaire à celui de la borne de Moore. Il consiste en effet à compter le nombre de requêtes qui traversent un arc donné.

Nous considérons un VPL (H, \mathcal{P}) établissant l'instance I en au plus h sauts et de charge $\pi(G, I, h)$ qu'on notera ici $\pi(h)$. Soit $P = \{\mathcal{P} \text{ (plus court chemin de } x \text{ à } y \text{ dans } H)\}$ l'ensemble des chemins dans G constitués d'au plus h VPs réalisant les connexions. La charge induite sur une arête physique $e \in E$ par P vaut au plus :

$$M = \pi(h) + 2\pi(h)(\Delta\pi(h)) + 3\pi(h)(\Delta\pi(h))^2 + \dots + h\pi(h)(\Delta\pi(h))^{h-1}$$

C'est-à-dire que, en notant $\pi = \pi(G, I)$,

$$\pi \leq M$$

En effet, un VP peut être utilisé en position k dans $(\Delta\pi(h))^{i-1}$ chemins de longueur i . En faisant varier k de 1 à i on trouve qu'un VP peut être utilisé par $i(\Delta\pi(h))^{i-1}$ chemins de longueur i . Comme il y a au plus $\pi(h)$ VPs sur e , on trouve que le nombre de chemins de P de longueur i qui peuvent emprunter un VP sur e est $i\pi(h)(\Delta\pi(h))^{i-1}$. On trouve M en faisant varier i de 1 à h .

Soit $f(x) = \sum_{i=0}^h x^i$. Alors $f'(x) = \sum_{i=1}^h ix^{i-1}$. Donc

$$M = \pi(h)f'(\Delta\pi(h))$$

Or $f(x) = \frac{x^{h+1}-1}{x-1}$ et

$$f'(x) = \frac{hx^{h+1} - (h+1)x^h + 1}{(x-1)^2}$$

$f'(x)$ est de l'ordre de hx^{h-1} donc on trouve une borne supérieure sur $\Delta\pi$ de l'ordre de $h(\Delta\pi(h))^h$. On trouve une borne exacte en minorant $(1/h)^{1/h}$ par $1/2$.

On veut montrer que $2\Delta\pi(h) \geq (\Delta\pi)^{\frac{1}{h}}$, or $M \geq \pi$ donc il suffit de montrer que $2\Delta\pi(h) \geq (\Delta M)^{\frac{1}{h}}$, c'est-à-dire que

$$(2\Delta\pi(h))^h - \Delta M \geq 0$$

ou encore que

$$(2\Delta\pi(h))^h - \Delta\pi(h)f'(\Delta\pi(h)) \geq 0 \quad (4.1)$$

On pose $x = \Delta\pi(h)$, (4.1) est alors équivalente à (4.2) qui est toujours vraie pour $x \geq 2$, $h \geq 1$.

$$(2^h - h)x^{h+1} + (h + 1 - 2^{h+1})x^h + 2^h x^{h-1} - x \geq 0 \quad (4.2)$$

□

4.2.2 Borne Supérieure, One-to-Many

Dans cette section, nous démontrons le théorème suivant puis, page 73, une généralisation pour tout h .

Théorème 4.4 *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et \mathcal{OA} une instance du type one-to-all,*

$$\pi(G, \mathcal{OA}, 2) \leq 2 \cdot \left\lceil \sqrt{\pi(G, \mathcal{OA}, 1)} \right\rceil - 1$$

Notons π la charge optimale $\pi(G, \mathcal{OA}, 1)$.

Soit un VPL d'excentricité 1 par rapport à la source s et de charge π , c'est-à-dire un ensemble P_1 de chemins entre s et chaque sommet de G tel que la charge induite par P_1 sur les arêtes de G vaut π . Nous construisons un VPL d'excentricité 2 et de charge au plus $2 \cdot \lceil \sqrt{\pi} \rceil - 1$. Pour ce faire, l'idée fondamentale est de couper certains chemins en deux de la manière suivante :

1. Dans un premier temps, nous repérons certains points où le nombre de chemins qui passent est grand (voir les détails dans la suite). En ces points, qui forment l'ensemble Y , nous coupons les chemins de P_1 en deux ; nous mettons la première partie dans P_3 et la seconde partie dans P_2 . Les chemins de P_1 non coupés sont aussi mis dans P_2 . Ce dernier ensemble induit une charge de $\lceil \sqrt{\pi} \rceil - 1$ sur les arêtes de G .
2. Dans un second temps, nous considérons les chemins de P_3 (de la source vers un point de Y). Nous transformons la famille P_3 qui, pour chaque y de Y , contient au moins $\lceil \sqrt{\pi} \rceil$ chemins de s à y en un ensemble P_4 qui, pour chaque y de Y , contient au moins un chemin de s à y et tel que la charge induite par les chemins de P_4 sur les arêtes de G est au plus $\lceil \sqrt{\pi} \rceil$.
3. Finalement, l'union des ensembles P_2 et P_4 fournit le VPL cherché.

Orientons tout d'abord les chemins de P_1 de la source s vers les autres sommets de G . Les modifications suivantes sur les chemins de P_1 permettent d'orienter les arêtes de G et de définir un ordre partiel sur les arcs ainsi obtenus.

- S'il existe L_1 et $L_2 \in P_1$ tels que $L_1 = L'_1[x, y]L''_1$ et $L_2 = L'_2[y, x]L''_2$ (i.e. L_1 et L_2 traversent l'arête $[x, y]$ dans des sens opposés), alors on remplace

L_1 par $L'_2 L''_1$ et L_2 par $L'_1 L''_2$. Cette opération, appelée *transformation A* et représentée sur la figure 4.1 (à gauche, les nouveaux chemins sont en clair), n'augmente pas la charge induite par les chemins de P_1 sur les arêtes de G . On peut donc considérer que si une arête de G est traversée par plusieurs chemins de P_1 alors ils la traversent tous dans le même sens. Les chemins de P_1 induisent donc une orientation sur les arêtes de G . Si une arête n'est traversée par aucun chemin, on l'oublie, on considère le graphe G résultant du graphe de départ auquel on a retiré les arêtes non traversées par des chemins.

- Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , deux arcs de G orientés par les chemins de P_1 . S'il existe L_1 et $L_2 \in P_1$ tels que $L_1 = L'_1 [x_1, y_1] L''_1 [x_2, y_2] L'''_1$ et $L_2 = L'_2 [x_2, y_2] L''_2 [x_1, y_1] L'''_2$ (i.e. L_1 et L_2 traversent les arcs (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans un ordre différent), alors on remplace L_1 par $L'_2 [x_2, y_2] L'''_1$ et L_2 par $L'_1 [x_1, y_1] L'''_2$. Cette opération, appelée *transformation B* et représentée sur la figure 4.1 (à droite), n'augmente pas la charge induite par les chemins de P_1 sur les arêtes de G . Les chemins de P_1 induisent donc un ordre sur les arcs de G . Un arc a_1 est plus grand qu'un arc a_2 s'il existe un chemin de P_1 qui traverse d'abord a_1 puis a_2 . Un arc est dit minimal s'il n'est plus grand qu'aucun autre arc. G est à présent considéré comme un graphe orienté symétrique dans lequel une des deux orientations est privilégiée.

Ces transformations reviennent simplement à considérer que le flot entier formé par les chemins est acyclique.

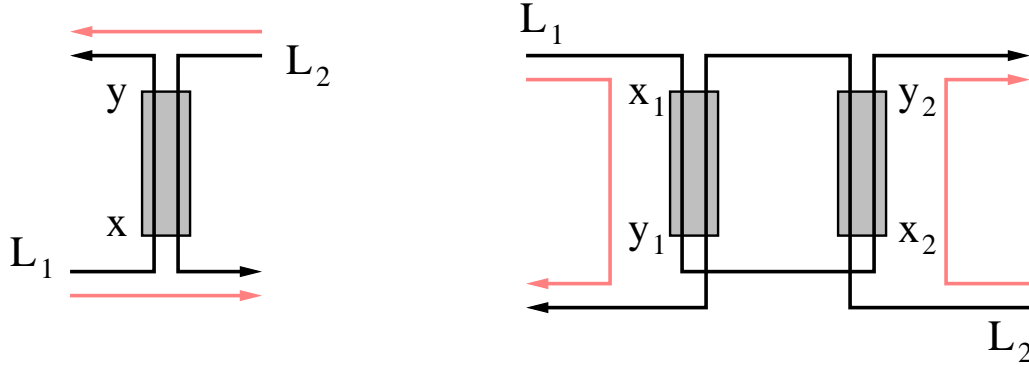


FIG. 4.1 – *Transformations A et B*

Présentons maintenant l'algorithme suivant qui, à partir de l'ensemble de chemins P_1 , construit l'ensemble P_2 et la famille P_3 (qui peut contenir plusieurs fois le même élément). Pour simplifier les expressions, notons $\alpha = \lceil \sqrt{\pi} \rceil$.

```

 $Y := \emptyset;$ 
 $P_2 := P_1;$ 
 $P_3 := \emptyset;$ 
tant que  $\exists e \in E$  tel que  $\pi(e, P_2) \geq \alpha$  faire
    choisir  $e = (x, y)$  arc minimal pour cette propriété;
     $Y := Y \cup \{y\};$ 
     $P_e := \{\text{chemins de } P_2 \text{ passant par } e\};$ 
    pour tout  $P = [s, x]e[y, z] \in P_e$  faire
         $P_2 := P_2 \setminus \{P\} \cup \{[y, z]\};$       (*)
         $P_3 := P_3 \cup \{[s, x]e\};$ 
    finpour
fantantque

```

Si $C = \sum_{e \in E} \pi(e, P_1)$ est la charge globale de G par les chemins de P_1 alors l'algorithme se termine en au plus C étapes car l'opération (*) fait décroître strictement la charge globale de G par les chemins de P_2 et que la boucle s'arrête lorsqu'aucune arête n'est chargée par des chemins de P_2 . En fait, cet algorithme se termine en au plus $\frac{|V|}{\alpha}$ étapes puisqu'il y a $|V|$ chemins au départ et que chaque étape en supprime au moins α .

Les chemins de la famille $P_2 \cup P_3$ chargent G exactement comme les chemins de P_1 ; en effet, la seule action de cet algorithme est de découper certains chemins en deux et d'en mettre une partie dans P_2 et une partie dans P_3 . Bien sûr, comme la condition d'arrêt a été choisie pour cela, à la fin de l'algorithme, la charge des chemins de P_2 sur les arêtes de G ne dépassent jamais $\alpha - 1$. D'où le lemme suivant :

Lemme 4.5 *P_2 est un ensemble de chemins tel que la charge induite par P_2 sur les arêtes de G ne dépasse pas $\lceil \sqrt{\pi} \rceil - 1$ et tel que pour tout $v \in V$*

- *soit il existe un chemin dans P_2 de s à v ,*
- *soit il existe $y \in Y$ tel qu'il existe un chemin dans P_2 de y à v .*

Considérons à présent les chemins de la famille P_3 . Pour chaque point $y \in Y$, soit $c(y)$ le nombre de chemins de s à y dans P_3 . On a $c(y) \geq \alpha$. En effet, la boucle **pour** se répète au moins α fois et ajoute à chaque fois dans P_3 un chemin de s à y . D'autre part, comme la charge des chemins de P_1 sur les arêtes de G est au plus π , il en est de même pour les chemins de P_3 . Pour manipuler ces chemins, il est plus clair d'utiliser le langage des flots que nous introduisons à présent.

Considérons le graphe G' dont l'ensemble des sommets est $V \cup \{p\}$ et l'ensemble des arcs est $E \cup (Y \times \{p\})$. s est toujours la source, p est le puits. Soit c la fonction de capacité définie par $c(u, v) = \pi$ pour tout arc $(u, v) \in E$ et $c(y, p) = c(y)$ pour les arcs reliant Y au puits.

Soit f la fonction sur les arcs de G' où $f(u,v)$ est le nombre de chemins de P_3 passant par (u,v) pour tout $(u,v) \in E$ arc de G et $f(y,p) = c(y)$ pour tout y de Y . f est un flot sur (G',c) car P_3 est constitué uniquement de chemins joignant s à un point de Y et donc la conservation du flot est triviale aux sommets en dehors de Y et, par définition de $c(y)$ elle est aussi vraie en y , point de Y . De plus, la valeur de f sur un lien est inférieure à la capacité du lien. Par construction du flot, la valeur de f en chaque arc est entière.

On utilise le théorème 4.2 pour construire un flot entier. Remarquons d'abord que comme la valeur de f est égale à la valeur de la coupe formée de la partition $(V, \{p\})$, cette coupe est minimale.

Considérons à présent la fonction de capacité c' sur les arcs de G' qui vaut $\lceil \pi/\alpha \rceil$ sur les arcs de G et 1 sur les arcs (y,p) . c' est supérieure à c/α sur les arcs de G et inférieure à c/α sur les arcs (y,p) . Ainsi, la coupe $(V, \{p\})$ est toujours minimale et vaut $|Y|$. Comme les capacités sont entières, on sait qu'il existe un flot entier f' de valeur $|Y|$.

Étant donné un $s - p$ flot entier f de valeur k , on sait en déduire facilement k chemins de s à p tels que le nombre de chemins qui passent par un arc (u,v) vaut $f(u,v)$.

Ainsi, le flot f' fournit un ensemble de chemins de s à p tel que la charge induite sur les arcs de G vaut au plus α (car $\lceil \pi/\lceil \sqrt{\pi} \rceil \rceil \leq \lceil \sqrt{\pi} \rceil$) et le nombre de chemins passant par y est exactement 1 pour tout y de Y (car la charge sur (y,p) vaut 1). Soit P_4 l'ensemble des chemins de s à Y induits par ces chemins de s à p . On fait subir à P_4 la transformation A qui permet d'affirmer que les chemins de P_4 traversent tous un arc donné dans le même sens et, en oubliant l'orientation, d'affirmer que les chemins de P_4 ne chargent pas une arête de G plus que α . D'où le lemme suivant :

Lemme 4.6 *P_4 est un ensemble de $|Y|$ chemins contenant, pour tout $y \in Y$ exactement un chemin de s à y et tel que la charge induite par P_4 sur les arêtes de G ne dépassent pas $\lceil \sqrt{\pi} \rceil$.*

Les lemmes 4.5 et 4.6 permettent d'énoncer et de démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.7 *L'ensemble de chemins virtuels $P_2 \cup P_4$ décrit un VPL de diamètre 2 et de charge $2\lceil \sqrt{\pi} \rceil - 1$ sur G .*

Ceci termine la démonstration du théorème 4.4.

Remarquons que cette démonstration se déroule de la même façon si l'instance est du type one-to-many puisqu'on manipule des simples flots. Plus généralement, on a même :

Théorème 4.8 Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{OM} une instance du type one-to-many,

$$\pi(G, \mathcal{OM}, h) \leq h \cdot \left\lceil \pi(G, \mathcal{OM}, 1)^{\frac{1}{h}} \right\rceil - h + 1$$

PREUVE. La preuve possède la même structure que celle du théorème précédent. Comme précédemment, nous notons π la charge optimale pour un saut $\pi(G, \mathcal{OM}, 1)$. Soit $\alpha = \lceil \pi^{1/h} \rceil$.

Soit \mathcal{OM} une instance de type one-to-many, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{OM} = \{s\} \times Y^0$ où Y^0 est un sous-ensemble de V . Soit un VPL d'excentricité 1 par rapport à la source s et de charge π , c'est-à-dire un ensemble P_1^0 de $|Y^0|$ chemins dont un entre s et chaque sommet de Y^0 tel que la charge induite par les sommets de P_1^0 sur les arêtes de G vaut π . Nous construisons un VPL d'excentricité h et de charge au plus $h \lceil \pi^{1/h} \rceil - (h - 1)$. Nous procédons en $h - 1$ étapes. Pour i de 1 à $h - 1$, l'étape i se décompose en 2 temps :

1. Dans un premier temps, nous repérons les sommets où la charge par les chemins P_1^{i-1} est supérieure à α . En ces points, qui forment l'ensemble Y^i , nous coupons les chemins de P_1^{i-1} en deux, la première partie est mise dans P_3^i et la seconde partie dans P_2^i . Ce dernier ensemble induit une charge de $\alpha - 1$ sur les arêtes de G .
2. Dans un second temps, nous considérons le flot induit par les chemins de P_3^i et le transformons en utilisant le théorème du flot entier pour obtenir un ensemble P_1^i de $|Y^i|$ chemins entre s et Y^i qui induit une charge inférieure à $\left\lceil \pi^{\frac{h-i}{h}} \right\rceil$.

Finalement, l'union de $P_2^1, P_2^2, \dots, P_2^{h-1}$, et P_1^{h-1} fournit le VPL cherché.

Comme cela est expliqué page 70, nous transformons toujours les flots considérés en flots acycliques.

Soit $(P_1^i)_{i=1..h-1}$, $(P_2^i)_{i=1..h-1}$, $(P_3^i)_{i=1..h-1}$ et $(Y^i)_{i=1..h-1}$ les ensembles définis par récurrence comme suit :

$Y^i := \emptyset;$
 $P_2^i := P_1^{i-1};$
 $P_3^i := \emptyset;$
tant que $\exists e \in E$ tel que $\pi(e, P_2^i) \geq \alpha$ **faire**
 choisir $e = (x, y)$ arc minimal dans le flot des chemins
 de P_2^i pour cette propriété;
 $Y^i := Y^i \cup \{y\};$
 $P_e := \{\text{chemins de } P_2^i \text{ passant par } e\};$
 pour tout $P = [s, x]e[y, z] \in P_e$ **faire**
 $P_2^i := P_2^{i-1+1} \setminus \{P\} \cup \{[y, z]\};$
 $P_3^i := P_3^i \cup \{[s, x]e\};$
 finpour
fantant que

P_1^i est ensuite construit à partir de P_3^i en utilisant le théorème du flot entier. Soit f^i le flot induit par les chemins de P_3^i . Il apporte au moins α unités de flot en chaque y de Y^i . Soit c^i la charge induite par ce flot. Soit $f'^i = f^i/\alpha$. La charge induite par f'^i est inférieure à $\lceil c^i/\alpha \rceil$ et ce flot apporte au moins 1 unité de flot en chaque y de Y^i . D'après le théorème du flot entier, il existe un flot entier qui apporte au moins 1 unité de flot en chaque y de Y^i et dont la charge induite ne dépasse pas $\lceil c^i/\alpha \rceil$. Ce flot fournit les chemins de s à $y \in Y^i$ qui constituent P_1^i .

Lemme 4.9 *Pour tout $i = 0..h-1$, on a*

1. *pour tout $y \in Y^i$, P_1^i contient exactement un chemin de s vers y ,*
2. *la charge induite par P_1^i sur les arêtes de G est inférieure à $\left\lceil \pi^{\frac{h-i}{h}} \right\rceil$,*
3. *pour $i \leq h-2$, P_2^{i+1} est un ensemble de chemins dans G tel que la charge induite par P_2^{i+1} sur les arêtes de G est inférieure à $\lceil \pi^{1/h} \rceil - 1$ et tel que pour tout $v \in Y^i$*
 - *soit il existe un chemin dans P_2^{i+1} de s à v ,*
 - *soit il existe $y \in Y^{i+1}$ tel que il existe un chemin dans P_2^{i+1} de y à v .*
4. *pour $i \leq h-2$, pour tout $y \in Y_{i+1}$, P_3^{i+1} contient au moins $\lceil \pi^{1/h} \rceil$ chemins de s à y et induit une charge inférieure à $\left\lceil \pi^{\frac{h-i}{h}} \right\rceil$ sur les arêtes de G .*

PREUVE. Le résultat est vrai pour $i = 0$. Les items 1. et 2. sont évidents. L'item 3. est vrai car pour tout y de Y_0 , le chemin de s à y de P_1^0 est soit conservé dans P_2^1 , soit coupé en deux et la deuxième partie (chemin entre $y' \in Y_1$ et y) est placée dans P_2^1 . L'item 4. est vrai car pour chaque y ajouté dans Y_1 , on ajoute au moins α chemins de s à y dans P_3^1 . De plus, la charge induite par les chemins de P_3^1 ne peut pas dépasser la charge induite par les chemins de P_1^0 .

Supposons le résultat vrai pour i quelconque entre 0 et $h - 2$. Montrons que le résultat est vrai pour $i + 1$. Comme P_3^{i+1} contient au moins α chemins de s à y et induit une charge inférieure à $\left\lceil \pi^{\frac{h-i}{h}} \right\rceil$ sur les arêtes de G et que P_1^{i+1} est construit sur le graphe de capacité

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \pi^{\frac{h-i}{h}} \right\rceil}{\alpha} \right\rceil \leq \left\lceil \pi^{\frac{h-i}{h}} \right\rceil$$

en divisant le flot induit par les chemins de P_3^{i+1} par α et en utilisant le théorème du flot entier qui nous permet de retrouver des chemins de s vers Y^{i+1} . Donc les items 1. et 2. sont vrais. Si $i \leq h - 3$, on sait construire P_2^{i+2} et P_3^{i+2} . L'analyse de l'algorithme déjà faite plus haut implique que les items 3. et 4. sont vrais. \square

Finalement, on trouve que

- $\forall y \in Y^{h-1}$, il existe un chemin de s vers y dans P_1^{h-1} et
- pour $0 \leq i \leq h - 2$, $\forall y \in Y^i$,
 - soit il existe un chemin de s vers y dans P_2^{i+1} ,
 - soit il existe $y' \in Y^{i+1}$ tel que il existe un chemin de y' vers y dans P_2^{i+1} ;

et que

- P_1^{h-1} induit une charge inférieure à $\left\lceil \pi^{\frac{1}{h}} \right\rceil$ et
- pour $i = 1..h - 1$, P_2^i induit une charge inférieure à $\left\lceil \pi^{\frac{1}{h}} \right\rceil - 1$.

Donc l'union des ensembles P_1^{h-1} et $\cup_{i=1..h-1} P_2^i$ fournit le VPL cherché. \square

4.2.3 Bornes Supérieures, All-to-All

Arbres

Nous démontrons ici le théorème suivant :

Théorème 4.10 *Pour tout arbre non orienté T ,*

$$\pi(T, \text{AA}, 2) \leq \sqrt{\pi(T)}$$

PREUVE. Soit T un arbre. Toute arête e de T partage T en deux sous-arbres T_1 et T_2 . On choisit e telle que $|T_1|$ est maximum et $|T_1| \leq |T_2|$. Il s'ensuit que l'indice de transmission de T vaut :

$$\pi(T) = |T_1| \cdot |T_2|.$$

Nous montrons que la charge minimale pour 2 sauts vaut alors :

$$\pi(T, \text{AA}, 2) = |T_1|.$$

En effet, s'il existe un sommet x de T_1 qui n'est relié à aucun sommet de T_2 par un chemin virtuel, alors tous les sommets de T_2 sont nécessairement reliés à au moins un sommet de T_1 (lui-même relié à x pour assurer le diamètre virtuel 2) et la charge sur e vaut au moins $|T_2|$. Dans le cas contraire, la charge sur e vaut au moins $|T_1|$. Si on appelle x_2 l'extrémité de e dans T_2 , une construction optimale consiste à positionner un chemin virtuel entre tout sommet et x_2 , ce qui donne une charge maximale de $|T_1|$.

$$\text{Donc } \pi(T, AA, 2) = |T_1| \leq \sqrt{|T_1| \cdot |T_2|} = \sqrt{\pi(T)}$$

□

Graphes généraux

Théorème 4.11 *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté à $n \geq 3$ sommets.*

Si $\pi(G) \geq \frac{1}{\sqrt{6e \ln 2}} \sqrt{n \ln n}$ alors

$$\pi(G, AA, 2) \leq 2\sqrt{6e} \cdot \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \cdot \pi(G)$$

sinon

$$\pi(G, AA, 2) \leq \frac{2}{\ln 2} \cdot \ln n.$$

Nous donnons une preuve probabiliste de ce théorème. Nous montrons qu'en prenant un graphe aléatoire à n sommets avec la bonne probabilité sur les arêtes, l'espérance de trouver un graphe de diamètre 2 qui charge G moins que la borne indiquée est non nulle, d'où son existence.

Ici, $Pr(B)$ désigne la probabilité de l'événement B .

DÉFINITION. Un *graphe aléatoire de probabilité uniforme p* est un graphe $H = (V, E')$ tel que pour toute paire de sommets $[i, j]$ avec $i \neq j$ on a $Pr([i, j] \in E') = p$.

Les propriétés structurales des graphes aléatoires et en particulier les valeurs de différents invariants sont étudiées dans [Bol85].

Rappelons une expression des *bornes de Chernoff* dont la démonstration détaillée se trouve par exemple dans le livre [HMRR98], page 200.

Théorème 4.12 ([HMRR98]) *Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires binaires indépendantes avec $Pr(X_k = 1) = p$ et $Pr(X_k = 0) = 1 - p$ pour tout k , et soit $S_n = \sum X_k$. Alors*

$$\forall \varepsilon > 0, Pr(S_n \leq (1 - \varepsilon)np) \leq e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2 np} \quad (4.3)$$

$$\forall \delta \geq 2e, \Pr(S_n \geq \delta np) \leq 2^{-\delta np} \quad (4.4)$$

Rappelons aussi les relations élémentaires suivantes, valables quelles que soient les relations de dépendance entre les événements A et B :

$$\Pr(A \vee B) \leq \Pr(A) + \Pr(B) \quad (4.5)$$

$$\Pr(A \wedge B) \geq \Pr(A) + \Pr(B) - 1 \quad (4.6)$$

Nous pouvons à présent formuler et démontrer le résultat suivant :

Lemme 4.13 *Soient $p = \sqrt{\frac{6 \cdot \ln n}{n}}$ et $H = (V, E')$ un graphe aléatoire à n sommets de probabilité uniforme p . Alors on a :*

$$\Pr(D_H \leq 2) \geq 1 - \frac{1}{n}$$

PREUVE. Soient x et y deux sommets de V . Calculons la probabilité pour que x et y soient à distance au moins 3 dans H .

Pour tout sommet z de V , $z \neq x$, soit X_z la variable aléatoire binaire telle que $X_z = 1$ si $[x, z] \in E$, $X_z = 0$ sinon. Les $n - 1$ variables X_z sont indépendantes avec $\Pr(X_z = 1) = p$ et $\Pr(X_z = 0) = 1 - p$. D'après l'équation (4.3) évaluée pour $\varepsilon = 1/2$, le degré de x vérifie :

$$\Pr\left(d_H(x) \leq \frac{(n-1)p}{2}\right) \leq e^{-\frac{(n-1)p}{8}}. \quad (4.7)$$

Comme $d_H(x, y) \geq 3$ si et seulement si y n'est voisin ni de x ni des voisins de x , on a

$$\Pr(d_H(x, y) \geq 3) = (1 - p)^{1+d_H(x)}.$$

On majore à présent la probabilité pour que les deux événements « $d_H(x) > \frac{(n-1)p}{2}$ » et « $d_H(x, y) \geq 3$ » se produisent en même temps :

$$\Pr\left(d_H(x, y) \geq 3 \cap d_H(x) > \frac{(n-1)p}{2}\right) = (1 - p)^{1+d_H(x)} \leq (1 - p)^{1+\frac{(n-1)p}{2}}$$

Comme $p = o(1)$ on a :

$$\Pr\left(d_H(x, y) \geq 3 \cap d_H(x) > \frac{(n-1)p}{2}\right) \leq e^{(1+\frac{(n-1)p}{2}) \cdot \ln(1-p)} \leq e^{-\frac{(n-1)p^2}{2} - o(1)} \quad (4.8)$$

Soit $d_H(x)$ est petit ($\leq (n-1)p/2$) avec probabilité calculée en (4.7), soit il est grand ($> (n-1)p/2$) et alors la probabilité de l'intersection des deux événements

« $d_H(x,y) \geq 3$ » et « $d_H(x) > (n-1)p/2$ » est calculée en (4.8). Ainsi, en additionnant ces deux bornes on obtient une majoration par $e^{-(n-1)p^2/2}(1-o(1)) + e^{-(n-1)p/8}$ de $Pr(d_H(x,y) \geq 3)$, soit,

$$Pr(d_H(x,y) \geq 3) \leq 2.e^{-\frac{(n-1)p^2}{2}}. \quad (4.9)$$

D'après (4.5), on peut sommer les probabilités données par (4.9) sur l'ensemble des paires de sommets de H et on trouve :

$$Pr(D_H \geq 3) \leq n^2.e^{-\frac{np^2}{2}}.$$

En prenant

$$p = \sqrt{\frac{6 \cdot \ln n}{n}}$$

on garantit que,

$$Pr(D_H \geq 3) \leq \frac{1}{n},$$

ce qui est annoncé dans le lemme. \square

En étudiant plus finement les relations de dépendance entre les variables, on obtient le résultat suivant qui donne des bornes serrées sur p pour que H soit de diamètre 2 :

Théorème 4.14 ([Bol85]) *Soit p une fonction de \mathbb{N} dans $[0,1]$ telle que $p(n)^2 n - 2 \log n \rightarrow \infty$ et $n^2(1-p(n)) \rightarrow \infty$. Soit P_n la probabilité qu'un graphe aléatoire à n sommets avec probabilité uniforme $p(n)$ sur les arêtes est de diamètre 2. Alors, $P_n = 1 - o(1)$.*

À partir d'un VPL de diamètre 1, c'est-à-dire un plongement du graphe complet dans G , nous construisons un VPL de diamètre 2 comme un graphe aléatoire de probabilité uniforme p et calculons sa charge.

Soit K_n le graphe virtuel complet et \mathcal{P} un plongement de K_n dans G . Soit π la charge induite par ce plongement, c'est-à-dire $\pi = \pi(G, K_n, \mathcal{P})$. Bien sûr, $D(G, K_n, \mathcal{AA}) = 1$.

Soit $H = (V, E')$ un graphe virtuel construit à partir de K_n en prenant indépendamment et aléatoirement les arêtes de K_n avec la probabilité uniforme $p = \sqrt{\frac{6 \cdot \ln n}{n}}$. On considère \mathcal{P}_2 , le plongement de H dans G induit par \mathcal{P} . Notons π_2 la charge induite par ce plongement, c'est-à-dire $\pi_2 = \pi(G, H, \mathcal{P}_2)$.

Lemme 4.15 *Si $\pi \geq \frac{\sqrt{n \ln n}}{\sqrt{6e \cdot \ln 2}}$ alors*

$$Pr \left(\pi_2 \leq 2e \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot \ln n}{n}} \cdot \pi \right) \geq \frac{1}{2},$$

sinon

$$Pr(\pi_2 \leq 2 \cdot \log_2 n) \geq \frac{1}{2}.$$

PREUVE. Soit g une arête de G . Soit $l = \pi(g, K_n, \mathcal{P})$ la charge de g par le plongement de K_n dans G . Soit X_a la variable binaire définie pour toute arête a de K_n telle que $g \in \mathcal{P}(a)$. X_a prend la valeur 1 si $a \in E'$, i.e. si a est une arête de H , et la valeur 0 sinon. Les l variables aléatoires binaires X_a sont indépendantes, donc d'après (4.4)

$$\forall \delta \geq 2e, Pr(\pi(g, H, \mathcal{P}_2) \geq \delta l p) \leq 2^{-\delta l p}.$$

En prenant $\delta' = \delta l / \pi \geq \delta$ on trouve :

$$\forall \delta' \geq 2e, Pr(\pi(g, H, \mathcal{P}_2) \geq \delta' \pi p) \leq 2^{-\delta' \pi p}.$$

En ajoutant les probabilités, on trouve

$$\forall \delta \geq 2e, Pr(\pi_2 \geq \delta \pi p) \leq \frac{n^2}{2} \cdot 2^{-\delta \pi p}$$

Ainsi,

$$\text{si } \delta \pi p \geq 2 \cdot \log_2 n \text{ alors } Pr(\pi_2 \geq \delta \pi p) \leq \frac{1}{2}.$$

Donc, si $\pi p \geq \frac{\log_2 n}{e}$ c'est-à-dire si $\pi \geq \frac{\sqrt{n \ln n}}{\sqrt{6e \cdot \ln 2}}$ alors, on peut prendre $\delta = 2e$ et on trouve $Pr(\pi_2 \geq 2e \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot \ln n}{n}} \cdot \pi) \leq \frac{1}{2}$. Sinon, on prend $\delta = \frac{2 \cdot \log_2 n}{\pi p} \geq 2e$ et on trouve $Pr(\pi_2 \geq 2 \cdot \log_2 n) \leq \frac{1}{2}$. \square

Soient A l'événement « $D_H \leq 2$ » et B l'événement « $\pi_2 \leq 2e \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot \ln n}{n}} \cdot \pi$ » si $\pi \geq \frac{\sqrt{n \ln n}}{\sqrt{6e \cdot \ln 2}}$ ou l'événement « $\pi_2 \leq 2 \cdot \log_2 n$ » sinon. D'après (4.6) on déduit que $Pr(A \wedge B) \geq (1 - 1/n) + 1/2 - 1 = 1/2 - 1/n$ qui est positif pour $n \geq 3$.

Puisque la probabilité de cet événement est non nulle, il existe un graphe H de diamètre 2 qui, plongé dans G par \mathcal{P}_2 , induit une charge inférieure à la borne indiquée. En prenant \mathcal{P} optimal, c'est-à-dire $\pi = \pi(G)$, on trouve le résultat annoncé dans le théorème 4.11.

4.3 Diamètre virtuel en fonction de l'arc-connexité

Les graphes considérés dans cette section sont orientés. L'instance de communication est all-to-all. Nous étudions les liens entre arc-connexité, charge et diamètre.

4.3.1 Cas général

Dans l'article présenté en annexe 5, nous proposons une construction pour les arbres orientés de capacité c utilisant les ensembles ρ -dominants définis comme suit :

DÉFINITION. Soit $G = (V, E)$ un graphe et ρ un entier positif. Un sous-ensemble S de V est ρ -dominant si pour tout x de V , $d_G(S, x) \leq \rho$ où $d_G(S, x)$ désigne la distance minimale de x à un point de S .

Dans un arbre enraciné, nous appelons *profondeur* d'un sommet sa distance à la racine. Les *parents* d'un sommet x sont les sommets sur le chemin de la racine à x , x exclu. On montre au chapitre 5 le lemme suivant :

Lemme 5.18 *Soit T un arbre enraciné, pour tout ρ il existe un ensemble ρ -dominant de cardinalité au plus $2^{\frac{n-1}{\rho+1}}$ tel que les chemins d'un sommet de S à son plus profond parent dans S sont deux à deux disjoints.*

Il s'agit de trouver dans l'arbre un ensemble S , ρ -dominant, de le relier à tous les autres sommets en utilisant une unité de capacité puis de considérer le nouvel arbre formé par S . Nous construisons ainsi par récurrence un VPL de diamètre au plus

$$10.c.n^{\frac{1}{2c-1}}.$$

DÉFINITION. Soit $G = (V, E)$. T est un *arbre couvrant* de G si

- T est un graphe partiel de G ,
- $V(T) = V$, et
- T est un arbre.

Soit $G = (V, E)$ un graphe possédant t arbres couvrants deux à deux arêtes disjoints. On peut utiliser la même construction en changeant d'arbre après c itérations. On trouve que le diamètre virtuel sur G avec capacité c est inférieur au diamètre virtuel sur un arbre à n sommets avec capacité tc . Ainsi,

Théorème 4.16 *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté symétrique tel que le graphe non orienté sous-jacent possède t arbres couvrants deux à deux arêtes disjoints alors :*

$$\vec{D}(G, AA, c) \leq 10tcn^{\frac{1}{2tc-1}}.$$

Corollaire 4.17 *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté symétrique d'arc-connexité λ alors*

$$\vec{D}(G, AA, c) \leq 10tcn^{\frac{1}{2tc-1}}.$$

où $t = \lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor$.

L'arc-connexité d'un graphe orienté symétrique G est égale à l'arête-connexité du graphe non orienté sous-jacent. Le théorème suivant permet alors d'établir le corollaire énoncé.

Théorème 4.18 (Kundu [Kun74]) *Soit G d'arête-connexité λ , alors il existe au moins $\lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor$ arbres couvrants deux à deux arêtes disjoints.*

Pour $\lambda = 2$ et $c = 1$, on trouve une borne supérieure de l'ordre de $O(n)$. Nous améliorons ce résultat dans la section suivante.

4.3.2 Cas particulier $\lambda = 2, c = 1$

Théorème 4.19 *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté symétrique à n sommets et d'arc-connexité 2, on a :*

$$\vec{D}(G, AA, 1) \leq 6.n^{\frac{2}{3}}$$

PREUVE. Soit k un réel fixé dont nous donnons la valeur dans la démonstration. Nous construisons un VPL de charge 1 sur G par étapes.

Soit $G_i = (V_i, E_i)$ un sous-graphe partiel de G . On note n_i le nombre de sommets de G_i et D_i le diamètre du VPL de charge 1 qu'on construit sur G_i . On construit par étapes un VPL tel que la condition (*) suivante soit vérifiée :

si après l'étape i un chemin virtuel couvre l'arc (x, y) alors,
il existe un autre chemin virtuel qui couvre l'arc (x, y) .

G_0 est formé d'un sommet quelconque de G , donc $n_0 = 1$ et $D_0 = 0$.

Supposons qu'il existe $x \in V$ tel que $d_G(x, V_i) > k$. Il existe $[x, y_1]$ et $[x, y_2]$, deux chemins arc-disjoints (pas forcément sommet-disjoints) ne passant pas dans G_i reliant x à deux points (peut-être égaux) de G_i . Ces deux chemins forment un chemin orienté symétrique de longueur n'_i supérieure à $k + 1$. Sur ce chemin, on positionne des chemins virtuels de longueur $\sqrt{n'_i}$ dans un sens et 1 dans l'autre sens. Les VP ainsi construits vérifient la condition (*). On sort du chemin pour aller dans G_i en au plus $2\sqrt{n'_i} - 2$ sauts, on se déplace dans G_i en au plus D_i sauts et on entre dans le chemin en au plus $2\sqrt{n'_i} - 1$ sauts. G_{i+1} est la réunion de G_i et de ce chemin. On a $n_{i+1} \geq n_i + n'_i$ et $D_{i+1} \leq D_i + 4\sqrt{n'_i} - 3$.

Si on note $\lambda = \frac{n'_i}{k}$ ($\lambda > 1$) on a $n_{i+1} \geq n_i + \lambda k$ et $D_{i+1} \leq D_i + 4\lambda\sqrt{k}$. Lorsque le nombre de sommets augmente d'au moins k , le diamètre augmente d'au plus $4\sqrt{k}$.

Lorsque le processus s'arrête, c'est-à-dire lorsque G_f est tel que pour tout $x \in V$ on a $d_G(x, V_f) \leq k$, alors on ajoute au VPL déjà construit sur G_f les VP formés

par tous les arcs hors de E_f . Les VP ainsi construits vérifient la condition (*). On obtient un VPL sur G de diamètre au plus $D_f + 2k$.

On a donc

$$n_f \geq \alpha k + 1, \text{ et } D_f \leq \alpha 4\sqrt{k}$$

En éliminant α on trouve

$$D_f \leq \frac{4n_f}{\sqrt{k}}$$

et le diamètre D du VPL construit sur G vérifie :

$$D \leq \frac{4n_f}{\sqrt{k}} + 2k$$

Le terme majorant atteint son minimum en $k = n^{2/3}$. On trouve $D \leq 4\frac{n_f}{n^{1/3}} + 2n^{2/3}$. Comme $n_f \leq n$ on a donc

$$D \leq 6.n^{\frac{2}{3}}$$

□

4.4 Diamètre virtuel du chemin orienté, capacité 1

Le graphe considéré est un chemin orienté, l'instance de communication **AA** et la capacité 1. Nous démontrons ici le théorème déjà énoncé page 52 qui donne le diamètre virtuel exact à une unité près :

Théorème 4.20

$$\left\lceil \frac{n}{2} + \log_2 n - 2,6 + 2 \cdot \frac{\log_2 n}{n} \right\rceil \leq \vec{D}(P_n, \mathbf{AA}, 1) \leq \left\lceil \frac{n}{2} + \log_2 n - 2,6 + 2 \cdot \frac{\log_2 n}{n} \right\rceil + 1$$

DÉFINITION. On appelle *cycle orienté unidirectionnel* le cycle auquel on a ajouté une orientation sur les arêtes, les transformant en arcs orientés tous dans le même sens de rotation. On note \vec{C}_n le cycle orienté unidirectionnel à n sommets.

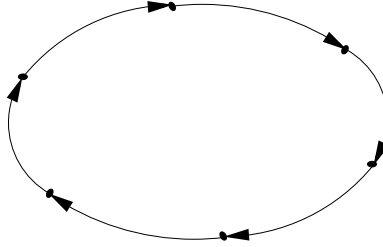


FIG. 4.2 – Le cycle orienté unidirectionnel \vec{C}_6

4.4.1 Exemple

Dans cette section, on introduit à l'aide d'un exemple la notion de graphe virtuel dans le chemin avec capacité 1. Nous construisons un graphe virtuel de diamètre minimal sur le chemin à n sommets lorsque n est de la forme $n = 2^{k+2} - 2k - 3$. Le graphe H est construit de telle sorte que l'excentricité du point central est minimale. Ainsi, dans l'exemple de la figure 4.3, l'excentricité du point central vaut 7, qui est aussi la distance du point central aux extrémités du chemin et aux plus éloignés des points des plus grands cycles. Les points dont la distance au point central égale l'excentricité sont marqués d'un rond.

Sur la figure 4.3, on représente le graphe physique avec les chemins virtuels (les flèches) et, en dessous, le graphe virtuel H correspondant.

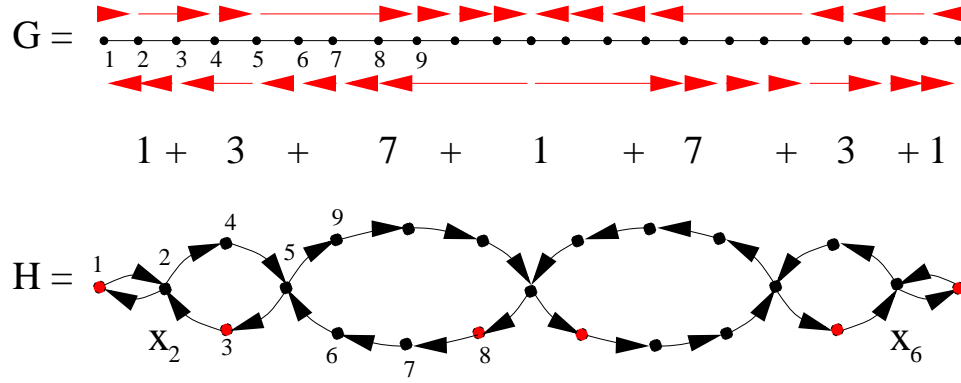


FIG. 4.3 – *Construction sur le chemin*

Plus généralement, lorsque n est de la forme $2^{k+2} - 2k - 3$, on construit H , symétrique par rapport au milieu du chemin et tel que la longueur des cycles de chemins virtuels double lorsqu'on s'approche du milieu. Ainsi, le diamètre de H vaut 2 fois l'excentricité du point central, soit $2(1 + 2 + \dots + 2^{k-1})$, soit

$$D_H = 2^{k+1} - 2.$$

En remplaçant k par $\log_2(D_H + 2) - 1$, on trouve

$$n = 2D_H - 2\log_2(D_H + 2) + 3 \text{ donc}$$

$$D_H = \frac{n}{2} + \log_2 \left(\frac{n}{2} + O(\log n) \right) - \frac{3}{2} \text{ soit}$$

$$D_H = \frac{n}{2} + \log_2 \frac{n}{2} + O \left(\frac{\log n}{n} \right) - \frac{3}{2} \text{ soit}$$

$$D_H = \frac{n}{2} + \log_2 n - \frac{5}{2} + O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Le calcul montre que le $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ est décroissant et est inférieur à $\frac{3}{2}$ pour $k = 1$. Finalement, une borne valable pour tout n de la forme $2^{k+2} - 2k - 3$ est

$$\vec{D}(P_n, \text{AA}, 1) \leq \frac{n}{2} + \log_2 n - 1$$

Calculons à présent une borne inférieure pour tout n .

4.4.2 Borne Inférieure

DÉFINITION. Une *chaîne de cycles* est un graphe formé par une union de cycles $(C_i)_{i=1..k}$ tels que pour i de 1 à $k - 1$, C_i et C_{i+1} s'intersectent en exactement un sommet et pour $|i - j| \geq 2$, $C_i \cap C_j = \emptyset$. Un exemple est représenté sur la figure 4.4.

Comme le montre le lemme suivant, on peut supposer que le graphe H sur le chemin de capacité 1 a toujours la forme d'une chaîne de cycles :

Lemme 4.21 *Un graphe virtuel fortement connexe H sur le chemin avec capacité 1 est une chaîne de cycles orientés unidirectionnels.*

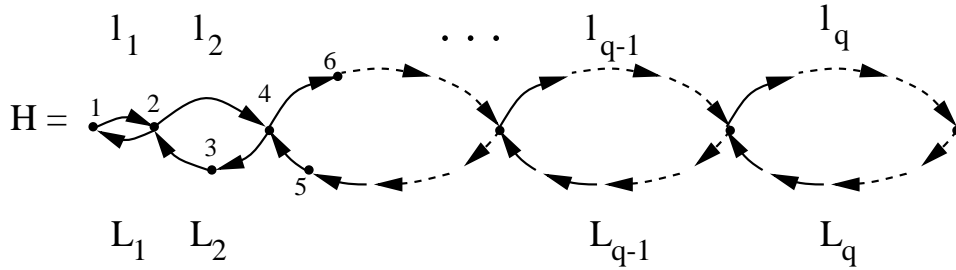


FIG. 4.4 – Une chaîne de cycles

PREUVE. La forte connexité du graphe impose que tous les arcs physiques sont chargés par au moins un chemin virtuel. Comme la capacité vaut un, chaque arc de G est chargé par exactement un chemin virtuel. La forte connexité impose aussi que tout sommet est extrémité initiale d'un chemin virtuel et extrémité terminale d'un autre. Les sommets sont de degrés entrant et sortant égaux, valant 1 ou 2. Soit $S = \{x \mid x \text{ est de degré 2 dans } H\}$. $S = \{x_j\}_{j=2..q}$; H est une chaîne de q cycles orientés unidirectionnels de longueurs $x_2 + 1$, $(x_j - x_{j-1} + 1)_{j=3..q}$, $n - x_q + 1$. \square

Dans une chaîne de cycles, on note l_i la longueur de la partie supérieure (orientée de gauche à droite) du cycle i , pour i variant de 1 à q , et L_i la longueur de la partie inférieure comme représenté sur la figure 4.4.

Pour trouver le nombre optimal de cycles et leur longueur, nous écrivons une condition nécessaire et suffisante sur les $(l_i, L_i)_{i=1..q}$ pour qu'une chaîne de q cycles de longueur (l_i, L_i) soit de diamètre inférieur à D donné. Nous relâchons alors la contrainte d'intégrité pour résoudre le problème dans les réels. La condition trouvée, donnée sous forme d'équations linéaires sur la longueur des cycles, décrit un ensemble convexe dans \mathbb{R}^{2q} noté $S(q, D)$ dans lequel on peut calculer des barycentres et ainsi construire des solutions plus symétriques. Ces solutions sont alors faciles à manipuler et on trouve leur forme optimale, c'est-à-dire celle qui donne le plus grand nombre de sommets.

Lemme 4.22 *H une chaîne de q cycles est de diamètre inférieur ou égal à D si et seulement si les inéquations suivantes sont vérifiées :*

$$\text{pour tout } 1 \leq i < j \leq q \quad l_i + L_i + \sum_{h=i+1}^{j-1} L_h + L_j + l_j - 2 \leq D \quad (4.10)$$

$$\text{pour tout } 1 \leq i < j \leq q \quad L_i + l_i + \sum_{h=i+1}^{j-1} l_h + l_j + L_j - 2 \leq D \quad (4.11)$$

PREUVE. Les équations 4.10 traduisent le fait que tous les chemins de x vers $y < x$ sont de longueur inférieure à D . Les équations 4.11 traduisent le fait que tous les chemins de x vers $y > x$ sont de longueur inférieure à D . \square

Remarquons que le nombre de sommets de H est $n = \sum_{i=1}^q (l_i + L_i) - q + 1$.

Considérons l'ensemble $S(q, D)$ des solutions de ces équations dans \mathbb{R}^{2q} . Pour faciliter la discussion, on identifie un point de $S(q, D)$ à une chaîne de cycles dont les longueurs sont réelles et dont le diamètre est le maximum des valeurs des membres de gauche des équations 4.10 et 4.11.

Les équations sont linéaires donc $S(q, D)$ est **convexe**.

On remarque d'abord que l'ensemble des solutions est symétrique en l_i et L_i pour tout $i = 1..q$, c'est-à-dire que si $(l_1, \dots, l_q, L_1, \dots, L_q)$ est solution alors $(L_1, \dots, L_q, l_1, \dots, l_q)$ l'est aussi. Ainsi, par convexité, $\left(\frac{l_1+L_1}{2}, \dots, \frac{l_q+L_q}{2}, \frac{l_1+L_1}{2}, \dots, \frac{l_q+L_q}{2}\right)$ est solution. Donc, à partir de H dans $S(q, D)$, on sait construire H' **ayant le même nombre de sommets** que H et tel que

$$l_i = L_i, \forall i = 1..q \quad (4.12)$$

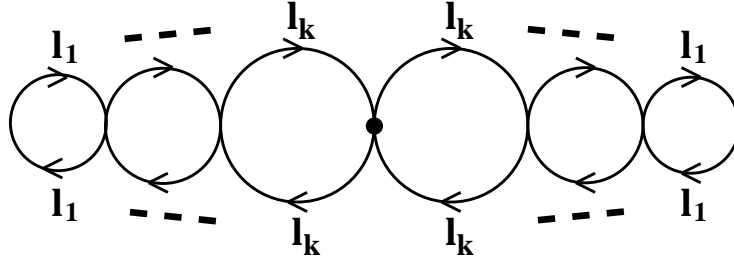
Les équations 4.12 sont linéaires et décrivent donc un convexe K dans \mathbb{R}^{2q} . $S'(q, D) = S(q, D) \cap K$ est convexe. $S'(q, D)$ se plonge dans \mathbb{R}^q (on ne considère plus que les variables l_i) où il est décrit par les équations suivantes :

$$\text{pour tout } 1 \leq i < j \leq q \quad 2l_i + \sum_{h=i+1}^{j-1} l_h + 2l_j - 2 \leq D \quad (4.13)$$

On a alors $n = 2\sum_{i=1}^{i=q} l_i - q + 1$.

On dit que H , chaîne de q cycles est de la **forme A**, s'il est de la forme présentée sur la figure 4.5. Les éléments de $S'(q,D)$ de la forme A forme un convexe de $\mathbb{R}^{\lceil \frac{q}{2} \rceil}$ noté $S_A(q,D)$. Soit $k = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$.

Si $q = 2k$



Si $q = 2k + 1$

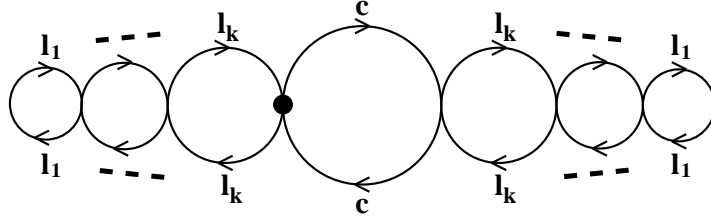


FIG. 4.5 – *Forme A d'un VPL*

Les équations 4.13 sont symétriques en $(l_i, l_{q-i+1})_{i=1.. \lfloor \frac{q}{2} \rfloor}$ donc si (l_1, \dots, l_q) est solution, alors (l_q, \dots, l_1) l'est aussi et donc par convexité, $(\frac{l_1+l_q}{2}, \dots, \frac{l_1+l_q}{2})$ aussi. Donc, pour q et D fixés, à partir de H dans $S(q,D)$, on sait construire H' dans $S_A(q,D)$ **ayant le même nombre de sommets** que H . Si $q = 2k + 1$ est impair on note $c = l_{k+1}$ la longueur du cycle du milieu pour la différencier des autres.

Notons $d_i = 2l_i - 1 + \sum_{j=i+1}^k l_j$ pour $i = 1..k$. Remarquons que $d_i - d_{i-1} = l_i - 2l_{i-1}$. Soit $d_m = \max_{i=1..k} d_i$, d_m est l'excentricité du point en noir sur la figure 4.5 dans le sous-graphe formé des k premiers cycles. Le diamètre et le nombre de sommets de $H \in S_A(q,D)$ sont :

q	D_H	n
pair	$2d_m$	$4\sum_{i=1}^k l_i - 2k + 1$
impair	$\max \{2d_m + c, d_m + 2c - 1\}$	$4\sum_{i=1}^k l_i + 2c - 2k$

On dit que H est de la **forme B** s'il est de la forme A et que

$$\forall i = 2..q, l_i = 2l_{i-1} \text{ et si } q \text{ est impair } c = 2l_k \quad (4.14)$$

On a $l_i = 2^{i-1}l_1, \forall i = 1..k$; $c = 2^k l_1$; et $d_i = d_m = 2^k l_1 - 1, \forall i = 1..k$. Le diamètre et le nombre de sauts de $H \in S_B(q, D)$ sont :

q	D_H	n
pair	$2(2^k l_1 - 1)$	$4(2^k - 1)l_1 - 2k + 1$
impair	$3 \cdot 2^k l_1 - 2$	$4(3 \cdot 2^{k-1} - 1)l_1 - 2k$

On note $S_B(q, D)$ l'ensemble des chaînes de q cycles de la forme B et de diamètre inférieur à D .

On montre à présent la proposition suivante :

Proposition 4.23 Soit $n(q, D) = \max \{n \mid \exists H \in S_A(q, D) \text{ à } n \text{ sommets} \}$. Si $H \in S_A(q, D)$ a $n(q, D)$ sommets alors $H \in S_B(q, D)$.

PREUVE. Soit une chaîne H de $S_A(q, D)$. Si H n'est pas de la forme B alors on construit grâce à l'algorithme présenté page suivante une chaîne de $S_B(q, D)$ ayant strictement plus de sommets que H .

Analyse de l'algorithme 4.6

n^- (resp. n^+) désigne le nombre de sommets du graphe avant (resp. après) l'exécution d'un tour de boucle.

1. Première partie de l'algorithme (partie commune à q pair ou impair).
Avant chaque tour de boucle, on a $l_i^- = 2l_{i-1}^-$ pour tout i entre 2 et $i_0 - 1$ et donc $d_i^- = \max_{j=1..i_0-1} d_j^-$ pour tout i entre 1 et $i_0 - 1$. Après chaque tour,

1. **pour** i_0 de 2 à k **faire**
 - si** $l_{i_0} \neq 2l_{i_0-1}$ **alors**
 - (a) **si** $l_{i_0} > 2l_{i_0-1}$ **alors**

$$\alpha = \frac{2l_{i_0-1} - l_{i_0}}{2^{i_0-1}}$$
 - (b) **sinon**

$$\alpha = \frac{2l_{i_0-1} - l_{i_0}}{2^{i_0}}$$
 - fin**
 - pour** i de 1 à $i_0 - 1$ **faire**

$$l_i = l_i - 2^{i-1}\alpha$$
 - fin**
 - $l_{i_0} = 2l_{i_0-1}$
- fin**

2. **si** q impair **et** $c \neq 2l_k$ **alors**
 - (a) **si** $c > 2l_k$ **alors**

$$\alpha = \frac{2l_k - c}{3 \cdot 2^{k-1}}$$
 - (b) **sinon**

$$\alpha = \frac{2l_k - c}{3 \cdot 2^k}$$
 - fin**
 - pour** i de 1 à k **faire**

$$l_i = l_i - 2^{i-1}\alpha$$
 - fin**
 - $c = 2l_k$
- fin**

FIG. 4.6 – *Algorithme de Transformation d'une chaîne de forme A en une chaîne de forme B*

on a $l_i^+ = 2l_{i-1}^+$ pour tout i entre 2 et i_0 et donc $d_i^+ = \max_{j=1..i_0-1} d_j^+$ pour tout i entre 1 et i_0 .

$$n^+ - n^- = 4 \left(-\sum_{i=1}^{i_0-1} 2^{i-1} \alpha + 2(l_{i_0-1}^- - 2^{i_0-2} \alpha) - l_{i_0}^- \right) = 4 \left((1 - 2^{i_0}) \alpha + 2l_{i_0-1}^- - l_{i_0}^- \right)$$

- (a) Dans le cas où $l_{i_0}^- > 2l_{i_0-1}^-$ on a $d_{i_0}^- = \max_{i=1..i_0} d_i^-$ et on veut $d_{i_0}^+ = d_{i_0}^-$ pour ne pas augmenter le diamètre. Comme,

$$d_{i_0}^+ - d_{i_0}^- = 2 \left(2l_{i_0-1}^- - l_{i_0}^- - 2^{i_0-1} \alpha \right)$$

$$\text{on prend } \alpha = \frac{2l_{i_0-1}^- - l_{i_0}^-}{2^{i_0-1}} < 0$$

$$\text{et alors } n^+ - n^- = 4 \left((1 - 2^{i_0}) \alpha + 2^{i_0-1} \alpha \right) = -4\alpha > 0$$

- (b) Dans le cas où $l_{i_0}^- < 2l_{i_0-1}^-$ on a $d_{i_0-1}^- = \max_{i=1..i_0} d_i^-$ et on veut $d_{i_0-1}^+ = d_{i_0-1}^-$ pour ne pas augmenter le diamètre. Comme

$$d_{i_0-1}^+ - d_{i_0-1}^- = -2^{i_0-1} \alpha + 2l_{i_0-1}^- - l_{i_0}^- - 2^{i_0-1} \alpha = 2l_{i_0-1}^- - l_{i_0}^- - 2^{i_0} \alpha$$

$$\text{on prend } \alpha = \frac{2l_{i_0-1}^- - l_{i_0}^-}{2^{i_0}} > 0$$

$$\text{et alors } n^+ - n^- = 4 \left((1 - 2^{i_0}) \alpha + 2^{i_0} \alpha \right) = 4\alpha > 0$$

Dans les deux cas, le diamètre ne change pas et le nombre de sommets augmente strictement.

2. Deuxième partie de l'algorithme (partie q impair).

Lorsqu'on exécute la ligne du test q impair, on a déjà :

$$l_i^- = 2l_{i-1}^- \text{ pour tout } i = 2 \dots k \quad \text{et} \quad D_{H-} = \max \{ 2l_k^-, c^- \} + 2l_k^- + c^- - 2$$

$$n^+ - n^- = -4\sum_{i=1}^k 2^{i-1} \alpha + 2(c^+ - c^-) = 4\alpha(1 - 2^k) + 2(2l_k^- - 2^k \alpha - c^-)$$

- (a) Dans le cas où $c^- > 2l_k^-$ on a $D_{H-} = 2l_k^- + 2c^- - 2$ et on veut $2l_k^+ + 2c^+ - 2 = 2l_k^- + 2c^- - 2$ pour ne pas augmenter le diamètre. Comme,

$$l_k^+ - l_k^- + c^+ - c^- = -2^{k-1} \alpha + 2(l_k^- - 2^{k-1} \alpha) - c^- = 2l_k^- - c^- - 3 \cdot 2^{k-1} \alpha$$

$$\text{on prend } \alpha = \frac{2l_k^- - c^-}{3 \cdot 2^{k-1}} < 0$$

$$\text{et alors } n^+ - n^- = 4(1 - 2^k) \alpha + 2^k \alpha = (4 - 3 \cdot 2^k) \alpha > 0$$

- (b) Dans le cas où $c^- < 2l_k^-$ on a $D_{H-} = 4l_k^- + c^- - 2$ et on veut $4l_k^+ + c^+ - 2 = 4l_k^- + c^- - 2$ pour ne pas augmenter le diamètre. Comme,

$$4(l_k^+ - l_k^-) + c^+ - c^- = -2^{k+1} \alpha + 2l_k^- - 2^k \alpha$$

$$\text{on prend } \alpha = \frac{2l_k^- - c^-}{3 \cdot 2^k} > 0$$

$$\text{et alors } n^+ - n^- = 4(1 - 2^k) \alpha + 2^{k+2} \alpha = 4\alpha > 0$$

Dans les deux cas, le diamètre ne change pas et le nombre de sommets augmente strictement.

□

Nous cherchons à présent le nombre maximum de sommets dans une chaîne de diamètre égal à D . Les calculs ont été faits avec Maple et sont présentés sur les figures 4.7 et 4.8.

On trouve donc que le nombre maximum de sommets pour D fixé est atteint lorsque $l_1 = 1$ et vaut

$$\begin{aligned} q \text{ pair} & \quad 2.D - 2 \log_2(D + 2) + 3 \\ q \text{ impair} & \quad 2.D - 2 \log_2(D + 2) + 2 \log_2 3 \end{aligned}$$

On obtient une meilleure borne supérieure avec q pair donc finalement, on trouve

$$n \leq 2D + 2 \log_2 3 - 2 \cdot \log_2(D + 2). \quad (4.15)$$

Donc

$$D \geq \frac{n}{2} + \log_2(D + 2) - \log_2 3 > \frac{n}{2} + \log_2 \cdot \left(\frac{n}{2} + \log_2 n \right) - \log_2 3$$

Donc

$$D > \frac{n}{2} + \log_2 n - \log_2 3 - 1 + 2 \cdot \frac{\log_2 n}{n}.$$

On a calculé l'écart entre le diamètre obtenu pour $n = 2^{k+2} - 2k - 3$ et $3 \cdot 2^{k+1} - 2k - 4$ pour les petites valeurs de k et cette borne inférieure. Si on ne tient pas compte du dernier terme (log) on trouve les écarts donnés dans le tableau de droite.

Écarts à la borne inférieure

3	0,44	6	0,14
9	0,21	16	0,08
23	0,17	38	0,06
1005	0,09	1516	0,005

Écarts à la borne inf sans log

3	1,5	6	1
9	0,9	16	0,6
23	0,56	38	0,34
1005	0,11	1516	0,02

4.4.3 Borne Supérieure

Notons H_n la construction proposée pour n sommets.

D en fonction de k et l.

```
> f:=(k,l)->2^(k+1)*l-2;
```

$$f := (k, l) \rightarrow 2^{(k+1)} l - 2$$

n en fonction de k et l.

```
> g:=(k,l)->(2^(k+2)-4)*l-2*k+1;
```

$$g := (k, l) \rightarrow (2^{(k+2)} - 4) l - 2 k + 1$$

l en fonction de D et k.

```
> h:=(D,k)->solve(D=f(k,l),l): h(D,k);
```

$$\frac{D + 2}{2^{(k+1)}}$$

n en fonction de D et de k.

```
> i:=(D,k)->g(k,h(D,k)): i(D,k);
```

$$\frac{(2^{(k+2)} - 4)(D + 2)}{2^{(k+1)}} - 2 k + 1$$

k en fonction de D et de l.

n en fonction de D et de l. On voit que n est une fonction décroissante de l.

```
> solve(h(D,k)=1,k): kl:= unapply(%,(D,1)):
simplify(i(D,kl(D,1)));
```

$$\frac{2 \ln(2) D + 7 \ln(2) - 4 l \ln(2) - 2 \ln\left(\frac{D + 2}{l}\right)}{\ln(2)}$$

k. On cherche k tel que la dérivée partielle de i par rapport à k est nulle, c'est-à-dire k tel que n maximum

```
> diff(i(D,k),k): di:=unapply(%,(D,k)): solve(di(D,k)=0,k):
kopt:=unapply(% ,D):
```

l optimal. On trouve que le l correspondant est une constante entre 1/2 et 1.

```
> lopt := D -> h(D,kopt(D)): simplify(lopt(D)); evalf(%);
```

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\ln(2)}$$

$$0.7213475205$$

Comme n est une fonction décroissante de l et qu'on sait que dans les constructions 2l est entier, on calcule la borne supérieure sur n avec l=1 (c'est la même que pour l=1/2).

```
> simplify(i(D,kl(d,1)));
```

$$\frac{2 \ln(2) D + 3 \ln(2) - 2 \ln(D + 2)}{\ln(2)}$$

FIG. 4.7 – Nombre maximum de sommets pour q pair

```

> f:=(k,l)->3*2^k*l-2;

$$f := (k, l) \rightarrow 3 \cdot 2^k l - 2$$

> g:=(k,l)->(3*2^(k+1)-4)*l-2*k;

$$g := (k, l) \rightarrow (3 \cdot 2^{k+1} - 4) l - 2 k$$

> h:=(D,k)->solve(D=f(k,l),l): h(D,k);

$$\frac{1}{3} \frac{D + 2}{2^k}$$

> i:=(D,k)->g(k,h(D,k)): simplify(i(D,k));

$$2 D - \frac{4}{3} D 2^{(-k)} + 4 - \frac{8}{3} 2^{(-k)} - 2 k$$

> solve(h(D,k)=1,k): kl:= unapply(%,(D,l)):
simplify(i(D,kl(D,l)));

$$2 \frac{\ln(2) D + 2 \ln(2) - 2 l \ln(2) + \ln(3) - \ln\left(\frac{D + 2}{l}\right)}{\ln(2)}$$

> diff(i(D,k),k): di:=unapply(%,(D,k)): solve(di(D,k)=0,k):
kopt:=unapply(% ,D):
> lopt := D -> h(D,kopt(D)): simplify(lopt(D));

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\ln(2)}$$

> simplify(i(D,kl(D,l)));

$$2 \frac{\ln(2) D + \ln(3) - \ln(D + 2)}{\ln(2)}$$


```

FIG. 4.8 – *Nombre maximum de sommets pour q impair*

D'après le tableau présenté à la page 88 on a :

q	l_1	D_H	n
$2k-1$	$3/2$	$3^2 \cdot 2^{k-2} - 2$	$3^2 \cdot 2^{k-1} - 2k - 2$
$2k$	1	$2^{k+1} - 2$	$2^{k+2} - 2k - 3$
$2k$	$3/2$	$3 \cdot 2^k - 2$	$3 \cdot 2^{k+1} - 2k - 5$
$2k+1$	1	$3 \cdot 2^k - 2$	$3 \cdot 2^{k+1} - 2k - 4$

Si n est de la forme $2^{k+2} - 2k - 3$ alors on construit une solution de la forme B avec $2k$ cycles et $l_1 = 1$, elle est optimale. Si n est de la forme $3 \cdot 2^{k+1} - 2k - 4$ alors on construit une solution de la forme B avec $2k + 1$ cycles et $l_1 = 1$, elle est optimale.

Si n est tel que $2^{k+2} - 2k - 3 < n < 3 \cdot 2^{k+1} - 2k - 4$ alors :
soit $n_0 = 2^{k+2} - 2k - 3$ et $\Delta n = n - n_0$. À partir de la solution H_{n_0} optimale trouvée pour n_0 de diamètre D_0 , on ajoute des sommets à H_{n_0} pour construire H_n . La construction est présentée dans le cas $k = 3$, ($n_0 = 23$), sur la figure 4.9. Le dernier point ajouté est représenté par une croix. Pour connaître l'augmentation du diamètre par rapport au cas $n = 23$, il faut compter le nombre de nouveaux points (dessinés en plus clair). On voit que pour une augmentation du nombre de sommets $\Delta n = 1$ on a une augmentation du diamètre $\Delta D = 1$ et pour $\Delta n \geq 2$, $\Delta D = \lceil \frac{\Delta n}{2} \rceil + 1$.

Dans le cas général, la construction est similaire. Le diamètre augmente d'une unité à chacun des trois premiers sommets ajoutés, puis d'une unité tous les deux sommets ajoutés. En ajoutant les sommets alternativement en haut et en bas, on construit la solution $q = 2k, l_1 = 3/2$ de la forme B qui donne un sommet de moins que la construction $q = 2k + 1, l_1 = 1$ de la forme B.

Si n est tel que $3 \cdot 2^k - 2k - 2 < n < 2^{k+2} - 2k - 3$ alors, on ajoute alternativement des sommets en haut et en bas à la construction optimale pour $n_0 = 3 \cdot 2^k - 2k - 2$. Le diamètre augmente de $\lceil \frac{\Delta n}{2} \rceil + 1$.

La borne inférieure (quasiment atteinte en n_0) augmente de $\frac{\Delta n}{2} + \frac{\Delta n}{n}$ lorsque n augmente de Δn . Finalement, la borne supérieure est égale à la borne inférieure + 1. En fait, pour n de la forme $2^{k+2} - 2k - 3$ ou $3 \cdot 2^{k+1} - 2k - 4$ on connaît la valeur

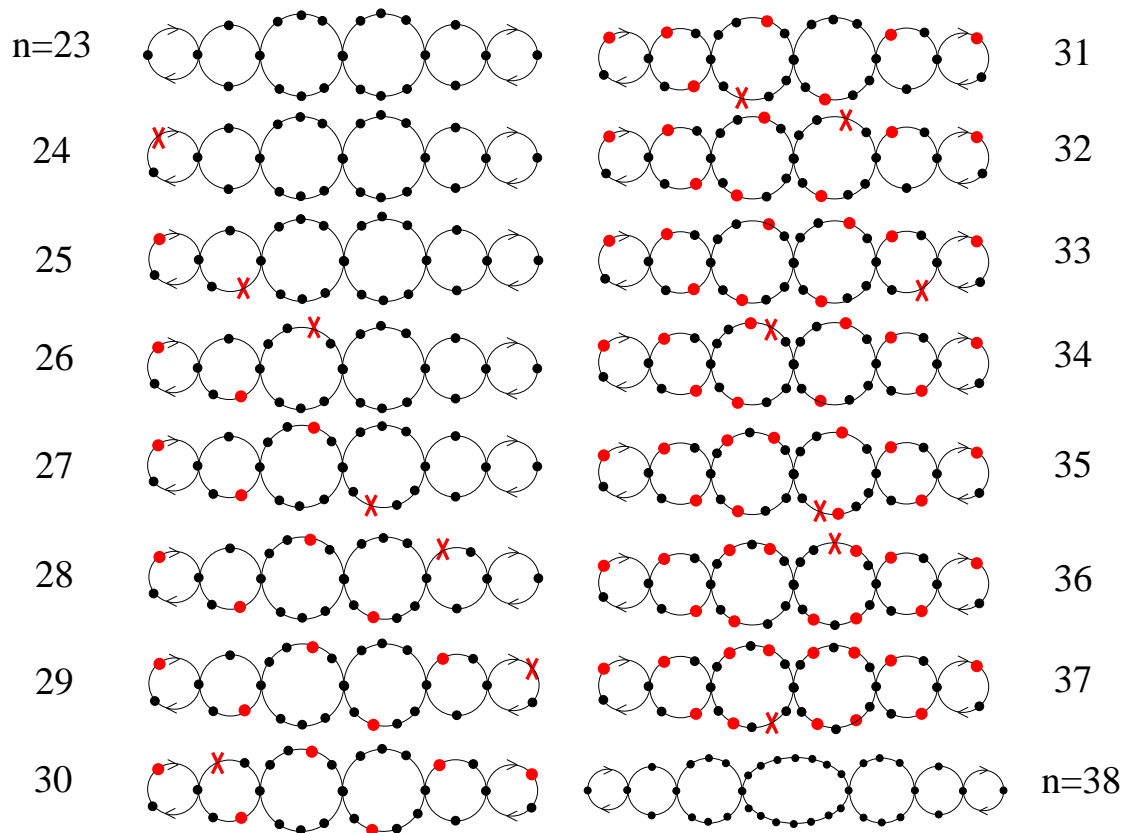


FIG. 4.9 – Construction pour $k = 3$, cas pair

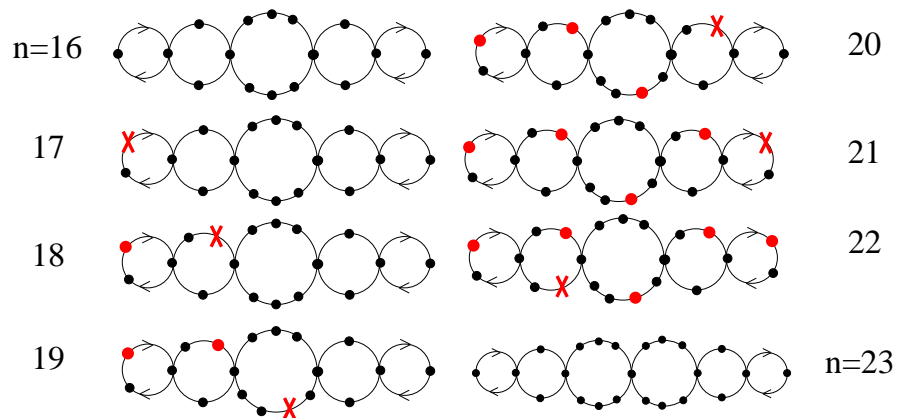


FIG. 4.10 – Construction pour $k = 2$, cas impair

exacte du diamètre ainsi que pour certains n entre ces valeurs. Pour les autres, on hésite entre deux valeurs pour le diamètre.

Pour connaître le diamètre du graphe construit par la méthode précédente sur le chemin à n sommets, il suffit de localiser n entre deux valeurs n_0 et n_1 dans le tableau ci-dessous, de noter le diamètre correspondant à n_0 , la plus petite des deux valeurs, et de lui ajouter $\lceil \frac{n-n_0}{2} \rceil + 1$. Par exemple, pour $n = 205$, on trouve un diamètre de $94 + \lceil \frac{205-178}{2} \rceil + 1 = 109$. La borne inférieure vaut 108.

k	n (q=2k)	D	n (q=2k+1)	D
1	3	2	6	4
2	9	6	16	10
3	23	14	38	22
4	53	30	84	46
5	115	62	178	94
6	241	126	368	190

Bibliographie

- [Bol85] B. Bollobas. *Random Graphs*. Academic Press, London, 1985.
- [FF56] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian J. Math.*, 8:399–404, 1956.
- [FF62] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.
- [HMRR98] M. Habib, C. McDiarmid, J. Ramirez-Alfonsin, and B. Reed. *Probabilistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics*. Springer, 1998.
- [Kun74] S. Kundu. Bounds on the number of disjoint spanning trees. *Journal of Combinatorial Theory*, 17:199 – 203, 1974.
- [LP86] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*, volume 121 of *Annals of Discrete Mathematics (29)*. North-Holland Mathematics Studies, 1986.

Chapitre 5

Directed Virtual Path Layout in ATM Networks

Ce chapitre présente l'article écrit avec Jean-Claude Bermond, David Peleg et Stéphane Pérennes et accepté dans *Journal of Theoretical Computer Science*. Nous y étudions le cas orienté et l'instance all-to-all, et cherchons des bornes sur le diamètre virtuel noté $\vec{D}(G, c)$ (au lieu de $\vec{D}(G, AA, c)$).

La section d'introduction motive la modélisation et rappelle les principaux travaux sur le sujet, la section 5.2 rappelle le modèle et les sections suivantes présentent des bornes sur le diamètre virtuel dans le cas de topologies particulières puis pour les graphes généraux.

Tout d'abord, la section 5.3 présente des bornes sur le cycle et montre que le diamètre virtuel est de l'ordre de $n^{1/2c}$. La constante multiplicative de ce terme n'est pas fine dans le cas d'une capacité quelconque. On trouve $1/2$ pour la borne inférieure et $4c/2^{1/2c}$ pour la borne supérieure. Il faut préciser que le théorème 3.24 de [ABC⁺97] présenté page 53 donne une borne inférieure de l'ordre de $cn^{1/c}$ en non orienté, ce qui fournit une borne inférieure de l'ordre de $2cn^{1/2c}$ en orienté, meilleure que la nôtre. Il n'y a donc qu'un écart d'un facteur multiplicatif 2 entre les deux meilleures bornes inférieure et supérieure. La constante exacte est donnée pour le cas d'une capacité unitaire et vaut $2\sqrt{2}$; dans ce cas, le terme du deuxième ordre est constant, c'est-à-dire que le diamètre vaut $2\sqrt{2n} + \Theta(1)$.

On trouve encore le bon ordre de grandeur pour le chemin $(n^{1/(2c-1)})$ dans la section 5.4. Il existe un écart d'un facteur multiplicatif c entre la borne inférieure et la borne supérieure dans le cas d'une capacité quelconque. Pour le cas particulier d'une capacité unitaire, la valeur exacte du diamètre est calculée au chapitre précédent, page 83.

Le cas des arbres est étudié dans les deux sections suivantes. Dans la section 5.5, nous proposons, pour l'arbre k -aire complet de profondeur h , deux bornes qui

donnent la valeur exacte de $\vec{D}(T(k,h),c)$ à 3 unités près. De plus, la construction optimale proposée est symétrique, ce qui montre que les deux bornes sont aussi valables en non orienté. Dans la section 5.6, nous proposons des bornes pour l'arbre général. En notant le diamètre de l'arbre T par D_T , la borne inférieure est en $D_T^{1/(2c-1)}$ et les bornes supérieures sont en $n^{1/2c}$ et $D_T^{1/(2c-1)} \cdot \log n$.

La section 5.7 présente des bornes sur les grilles $M(a,b)$ et les tores $TM(a,b)$ avec $a \leq b$. Nous donnons d'abord une construction pour le tore particulièrement intéressante dans le cas où a est petit ($a \leq \log b$) qui utilise la construction optimale du cycle. Si $a \geq \log b$, alors, dans la grille et le tore, le diamètre virtuel est de l'ordre de $\log n$. Ce résultat montre en particulier que certaines grilles de grand diamètre (de l'ordre de $n/\log n$) possèdent un petit diamètre virtuel (de l'ordre de $\log n$).

Viennent enfin dans la section 5.8 les bornes générales. On reconnaîtra en particulier page 123 le calcul d'une borne inférieure sur le diamètre virtuel, présenté aussi page 69 dans une version plus générale pour calculer une borne inférieure sur la charge.

5.1 Introduction

The advent of fiber optic media has changed the classical views on the role and structure of digital communication networks. Specifically, the sharp distinction between telephone networks, cable television networks, and computer networks has been replaced by a unified approach. The most prevalent solution for this new network challenge is *Asynchronous Transfer Mode* (ATM for short), which is thoroughly described in the literature [De 95, KG98]. The transfer of data in ATM is based on packets of fixed length, termed *cells*. Each cell is routed independently, based on two routing fields at the cell header, called *virtual channel identifier* (VCI) and *virtual path identifier* (VPI). This method effectively creates two types of predetermined simple routes in the network, namely, routes which are based on VPIs (called *virtual paths* or VPs) and routes based on VCIs and VPIs (called *virtual channels* or VCs). VCs are used for connecting network users (e.g., a telephone call); VPs are used for simplifying network management - routing of VCs in particular. Thus the route of a VC may be viewed as a concatenation of complete VPs.

A major problem in this framework is the one of defining the set of VPs in such a way that some good properties are achieved.

1. A capacity (or bandwidth) is assigned to each VP. The sum of the capacities of the VPs that share a physical link constitutes the *load* of this link. Naturally, this load must not exceed the link's capacity, namely, the amount of data it can carry. The sum of the capacities of all the physical links is a major component in the cost of the network, and should be kept as low as possible.

2. The maximum number of VPs in a virtual channel, termed *hop count* in the literature, should also be kept as low as possible so as to guarantee low set up times for the virtual channels and high data transfer rates.

In its most general formulation, the *Virtual Path Layout (VPL)* problem is an optimization problem in which, given a certain communication demand between pairs of nodes and constraints on the maximum load and hop count, it is first required to design a system of virtual paths satisfying the constraints and then minimizing some given function of the load and hop count.

We employ a restricted model similar to the one presented by Cidon, Gerstel and Zaks in [GZ94b]. In particular, we assume that all VPs have equal capacities, normalized to 1. Hence the load of a physical link is simply the number of VPs that share this link.

Although links based on optical fibers and cables are directed, traditional research uses an undirected model. Indeed, this model imposes the requirement that if there exists a VP from u to v then there exists also a VP from v to u . In fact, that is the way ATM networks are implemented at the present time. However, the two VPs (the one from u to v and the one in the other direction) do not need to have the same capacity. Indeed, in many applications the flows on the VPs are not equal. For example, in a video application where u is a server and v a consumer there is a VP from u to v using a large capacity (transmission of video data) and a VP from v to u used only for control or acknowledgments with a very small capacity which can be considered as negligible. Therefore, it seems more reasonable to use a directed model like the one introduced by Chanas and Goldschmidt in [CG98]. This would allow us to model the situation described above by a single VP of capacity 1 in the main direction.

We focus on the *all-to-all problem* (all pairs of nodes are equally likely to communicate). Thus, the resulting maximum hop count can be viewed as the *diameter* of the graph induced by the VPs.

More formally, given a communication network, the VPs form a virtual directed graph (*digraph*) on the top of the physical one, with the same set of vertices but with a different set of arcs. (Specifically, a VP from u to v is represented by an arc from u to v in the virtual digraph.) This virtual digraph provides a *Directed Virtual Path Layout (DVPL)* for the physical graph. Each VC can be viewed as a simple dipath in the virtual digraph. Therefore, a central problem is to find a tradeoff between the maximum load and the virtual diameter. In this article, we consider the following problem:

Given a capacity on each physical arc, minimize the diameter of an admissible virtual graph (a virtual digraph that doesn't load an arc more than its capacity)

Related Work The problem has been considered in the undirected case, for example, in [GZ94b, GWZ95, SV96, GCZ96, KKP97, EFZ97]. Observe that the undirected and symmetric directed models are tightly coupled. Specifically, any solution of the undirected case with load c can be transformed into a solution for

directed case with load c . Conversely, any solution of the directed case with load c can be transformed into a solution for the undirected case with load $2c$.

However, in general both of these transformations do not yield optimal results, neither for lower or upper bounds. This is mainly because optimal solutions for the directed case are far from being symmetric. Hence specialized methods are required for obtaining optimal solutions in either of the two models.

As an example, consider the case $c = 1$. In the undirected case, the only feasible solution is to take the original edges as virtual paths of length 1, and the resulting virtual diameter is the diameter of the original graph. For example, for an undirected cycle with $c = 1$, this results in a virtual diameter of $n/2$. So merely applying the above transformation will yield an upper bound of $n/2$ for the directed case as well. In contrast, using a direct derivation we obtain a tight solution for this case which has a considerably lower diameter bound, namely, $2n^{1/2}$. As another example, for cycles, the results of [ABC⁺97] or [DFZ97] combined with the above transformation yield upper bounds of order $n^{1/c}$, whereas here we obtain a (tight) bound of $n^{1/2c}$.

The problem of minimizing the maximum load over all VPL with bounded hop-count is studied in [FZ97, BBGG97], and minimizing also the average load is considered in [GWZ95]. The one-to-many problem is handled in [FZ97, GWZ95], where the focus is on minimizing the eccentricity of the virtual graph from a special point called the root (this problem is the *rooted virtual path layout problem*) rather than minimizing the diameter of the virtual graph. A duality in the chain network between the problem of minimizing the hop-count knowing the maximum load, and the one of minimizing the load, knowing the maximum hop-count, is established in [FZ97]. The reader can find an excellent survey of the results in the undirected model in [Zak97].

The techniques involved in our constructions bear a certain resemblance to various embedding techniques used previously in the context of parallel computing, in order to implement a useful virtual architecture on a given practical machine topology (cf. [Ros80, HMR83]). The parameters of interest in such embeddings are the number of virtual processors mapped onto any physical processor, the load on the physical links, and the dilation of the embedding, namely, the maximum length of the physical path corresponding to a given virtual link. The relevant concerns in our context are somewhat different, as dilation is of no consequence, and on the other hand, we have the freedom of designing the virtual topology as desired, in order to optimize its diameter.

Our Results The following table summarizes our results, giving lower and upper bounds on the virtual diameter (the minimum diameter of an admissible virtual digraph) as a function of the number of vertices n in the physical graph, its diameter D_G , its maximum in- and out-degree d , and the capacity c considered as a constant. The results mentioned for the path in the special case $c = 1$ are due

to [BCG98, Cha98].

Graph G	Capacity	Lower Bound	Upper Bound
General Graph	$c = o(n)$	$\frac{\log n}{\log(cd)} - 1$	D_G $\mathcal{O}(c \cdot n^{\frac{1}{2c-1}})$ $\mathcal{O}(D_G^{1/(2c-1)} \cdot \log n)$
Path P_n	$c = 1$	$\frac{n}{2} + \log n - \mathcal{O}(1)$	$\frac{n}{2} + \log n$
	$c = o(n)$	$n^{\frac{1}{2c-1}}/2$	$\mathcal{O}(c \cdot n^{\frac{1}{2c-1}})$
Cycle C_n	$c = 1$	$2\sqrt{2n} + \mathcal{O}(1)$	$2\sqrt{2n} + 1$
	$c = o(n)$	$n^{\frac{1}{2c}}/2$	$4c \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2c}} + 1$
Torus $TM(a,b), a \leq b$	$c = o(n)$	$\Omega((a \cdot b)^{1/2ac})$	$\mathcal{O}(a \cdot b^{1/2ac})$
Mesh $M(a,b), \log b \leq a \leq b$	$c = o(n)$	$\Omega(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Arbitrary Tree T	$c = o(n)$	$D_T^{1/(2c-1)}/2$	$10c \cdot n^{1/(2c-1)}$ $\mathcal{O}(c \cdot D_T^{1/(2c-1)} \cdot \log n)$
Complete k -ary Tree T $h = \text{depth}(T)$	$c = 2, k = 2$	$\begin{matrix} h & (h \text{ even}) \\ h-1 & (h \text{ odd}) \end{matrix}$	$h + 1$
	$c = o(n)$	$2 \left\lceil \frac{h-1}{\lfloor \log_k c \rfloor + 1} \right\rceil + 1$	$2 \left\lceil \frac{h}{\lfloor \log_k c \rfloor + 1} \right\rceil + 2$

5.2 Model

A physical network is represented by a *capacitated digraph* $G = (V, E, c)$, that is a directed graph with vertex set V and arc set E , together with a positive integral capacity function c on the set of arcs. We always denote by n the number of vertices and in this paper we mostly consider constant capacity functions, i.e. $\forall e \in E, c(e) = c_0$.

The network formed by a set of VPs is represented by a digraph $H = (V, E')$ together with a layout P assigning to each arc $e' = (x, y) \in E'$ a simple directed path (dipath) $P(e')$ connecting x to y in G . In our terminology, the pair (H, P) is a *virtual digraph on G* , an arc of H is a *virtual arc*, and the dipath $P(e')$ in G associated with a virtual arc e' is a *virtual dipath (VP)*.

The *load* of an arc e of G is the number of virtual dipaths containing the arc e , that is, $l(e) = \#\{e' \in E' \mid e \in P(e')\}$. A virtual digraph (H, P) satisfying the requirement $\forall e \in E, l(e) \leq c(e)$ is referred to as a *c -admissible Directed Virtual Paths Layout* of G , shortly denoted *c -DVPL* of G . The aim is to design c -DVPL of G with minimum hop-count, i.e, to find a virtual digraph with minimum diameter.

For any digraph F , $d_F(x, y)$ denotes the distance from x to y in F , and D_F denotes diameter of F . The *virtual diameter*, $\vec{D}(G, c)$, of the digraph G with respect to the capacity c , is the minimum of D_H over all the c -DVPL H of G . In Fig. 5.1, G consists of the symmetric directed cycle C_n . The virtual graph H consists of arcs $(i, i+1)$ in the clockwise direction and arcs $(ip, (i-1)p)$ in the opposite direction (assuming that p divides n). H is in fact a circuit-bracelet (see details in section

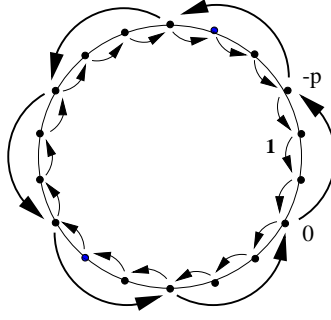


FIG. 5.1 – *Example of DVPL: the cycle, capacity 1*

5.3.2). The load of every arc of C_n is 1. Choosing $p = \sqrt{\frac{n}{2}}$ gives good DVPL with diameter at most $2\sqrt{2n} + 1$.

5.3 Cycles C_n

In this section the physical digraph G is C_n , the symmetric directed cycle of length n . We choose arbitrarily a direction on C_n . For concreteness, consider as positive, or forward (resp., negative or backward) the clockwise (resp., counterclockwise) direction. We assume that $\forall e \in E$, $c(e) = c^+$ if e is a forward arc and $c(e) = c^-$ if e is a backward arc, for some constant nonnegative integers c^+, c^- .

It turns out that our bounds can be expressed as functions of $\sigma = c^+ + c^-$. It is then convenient to define $UBC(n, \sigma)$ (resp., $lb_C(n, \sigma)$) as an upper bound (resp., lower bound) on $\vec{D}(C_n, c)$ valid if c satisfies $c^+ + c^- = \sigma$. By the definition, $lb_C(n, \sigma) \leq \vec{D}(C_n, c) \leq UBC(n, \sigma)$.

5.3.1 General Case

Proposition 5.1

$$\frac{n^{\frac{1}{\sigma}}}{2} \leq \vec{D}(C_n, c) \leq 2\sigma \left\lceil \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \right\rceil - 2\sigma + 1 < 2\sigma \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + 1$$

The results of [ABC⁺97] or those of [DFZ97] for the undirected case (see the survey of Zaks [Zak97]) yield upper bounds of $\mathcal{O}(n^{1/c})$ for the directed case. In contrast, here we obtain a (tight) bound of $\mathcal{O}(n^{1/2c})$.

Upper and lower bounds are both proved by induction from the next two lemmas.

Lemma 5.2 $lb_C(n, \sigma) \geq \min_{p \in N^+} \{\max(\frac{n}{2p}, lb_C(p, \sigma - 1))\}$.

Proof. Let H be an optimal c -DVPL of C_n and let $[x_1, y_1]^+$ be the dipath consisting of all the vertices of C_n between x_1 and y_1 in the positive direction. Let $d^+(x_1, y_1)$

denote the number of arcs in $[x_1, y_1]^+$. We say that $[x_1, y_1]^+$ is *covered* by H if (the VP corresponding to) some virtual arc e' contains $[x_1, y_1]^+$.

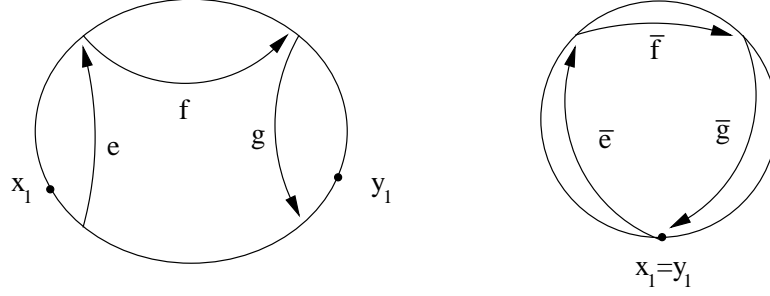


FIG. 5.2 – *Collapsing a cycle*

First we prove that if $[x_1, y_1]^+$ is covered by e' then $D_H \geq lb_C(d^+(x_1, y_1), \sigma - 1)$. For this, we shorten the cycle by identifying all the nodes in $[y_1, x_1]^+$ with x_1 , obtaining a cycle C' of length $d^+(x_1, y_1)$. Virtual arcs are just transformed according to this graph quotient (see Fig. 5.2). As an example a virtual arc from $x \in [x_1, y_1]^+$ to $y \in [x_1, y_1]^+$ is left unchanged; and a virtual arc from $x \in [x_1, y_1]^+$ to $y \in [y_1, x_1]^+$ is transformed into the arc (x, x_1) . Note that the virtual arc containing the positive arcs of $[x_1, y_1]^+$ is transformed into a loop. We also remove loops or multiple virtual dipaths in order to get a simple DVPL on C' .

This transformation does not increase the load of any arc; furthermore the virtual arc e' that contained $[x_1, y_1]^+$ disappears, so the congestion of any positive arc decreases. Moreover, our transformation does not increase the virtual diameter.

Consequently, we obtain a c' -DVPL of C' (a cycle of length $d^+(x_1, y_1)$) with $c'^+ + c'^- = \sigma - 1$, and diameter at most D_H . It follows that

$$D_H \geq lb_C(d^+(x_1, y_1), \sigma - 1) \quad (5.1)$$

Now we argue that there exist vertices u and v with large $d^+(u, v)$ such that $[u, v]^+$ is covered. Let \mathcal{P} be the shortest dipath in H from 0 to $n/2$, and assume w.l.o.g. that \mathcal{P} contains the arcs of $[0, n/2]^+$. Let \mathcal{S} denote the set of vertices of \mathcal{P} between x and y in the positive direction. Then $|\mathcal{S}| \leq D_H + 1$, and therefore there exist vertices u and v such that $[u, v]^+$ is covered and with

$$d^+(u, v) \geq \frac{n}{2D_H} . \quad (5.2)$$

Let $p = \max\{d^+(u, v) \mid [u, v]^+ \text{ is covered}\}$. From (5.2) we have $D_H \geq \frac{n}{2p}$, and from (5.1) it follows that $D_H \geq lb_C(p, \sigma - 1)$. □

Lemma 5.3 $UBC(n, \sigma) \leq \min_{p \in \mathbb{N}^+} \{2(p - 1) + UBC(\lceil \frac{n}{p} \rceil, \sigma - 1)\}.$

Proof. Let us construct a c -DVPL on C_n . Without loss of generality suppose that $c^+ \geq c^-$, so $c^+ \neq 0$. Let $p \in N^+$, we proceed as follows.

- Use n virtual arcs $(i, i+1)_{i \in [0..n-1]}$ of dilation 1 in the positive direction.
- Let S be the set of vertices $\{0, -p, -2p, \dots, -(\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1)p\}$, and note that vertices of S form a cycle $C_{\lceil \frac{n}{p} \rceil}$.
- Use an optimal c' -DVPL for $C_{\lceil \frac{n}{p} \rceil}$ with $c'^+ = c^+ - 1$, and $c'^- = c^-$, that is $c'^+ + c'^- = \sigma - 1$.

We denote by $\Delta(S)$ the diameter of the set S , that is, the maximal distance between any two vertices in S , and by $d(S, x)$ (resp., $d(x, S)$) the minimum distance from x to any vertex of S (resp., from any vertex of S to x). By construction $\Delta(S)$ is at most $UBC(\lceil \frac{n}{p} \rceil, \sigma - 1)$; moreover, for any vertex x , we have $d(S, x) \leq p - 1$ and $d(x, S) \leq p - 1$. Hence

$$d(x, y) \leq d(S, x) + d(y, S) + \Delta(S) \leq 2(p - 1) + UBC(\lceil \frac{n}{p} \rceil, \sigma - 1).$$

□

Proof. [proposition 5.1] First we consider the lower bound. We prove by induction on σ that $lb_C(n, \sigma) \geq \frac{1}{2}n^{\frac{1}{\sigma}}$. For the initial case we have $lb_C(n, 1) = n - 1 \geq \frac{n}{2}$. Now to go from $\sigma - 1$ to σ we use lemma 5.2 which states that $lb_C(n, \sigma) \geq \min_{p \in N^+} \max(\frac{n}{2p}, \frac{1}{2}p^{\frac{1}{\sigma-1}})$. An elementary analysis shows that $\max(\frac{n}{2p}, \frac{1}{2}p^{\frac{1}{\sigma-1}}) \geq \frac{1}{2}n^{\frac{1}{\sigma}}$ attained for $p = n^{1-1/\sigma}$. Hence $lb_C(n, \sigma) \geq \frac{1}{2}n^{\frac{1}{\sigma}}$ and the proof is completed.

Now, we prove the upper bound. First we show by induction on σ that for $n = 2a^\sigma, a \in N$, $UBC(n, \sigma) \leq 2\sigma \left(\frac{n}{2}\right)^{1/\sigma} - 2\sigma + 1 = 2\sigma a - 2\sigma + 1$. For $\sigma = 1$, $UBC(n, 1) \leq n - 1$ is true. For the inductive step from $\sigma - 1$ to σ , we apply lemma 5.3 with $p = a$, getting $UBC(n, \sigma) \leq 2(a - 1) + UBC(2a^{\sigma-1}, \sigma - 1)$. By induction, $UBC(2a^{\sigma-1}, \sigma - 1) \leq 2(\sigma - 1)a - 2(\sigma - 1) + 1$; so we get the expected result.

For other values of n , the claim is proved as follows. Let $a = \left\lceil \left(\frac{n}{2}\right)^{1/\sigma} \right\rceil$. a is such that $n \leq 2a^\sigma$. As UBC is an increasing function on n , we obtain $UBC(n, \sigma) \leq 2\sigma a - 2\sigma + 1 = 2\sigma \left\lceil \left(\frac{n}{2}\right)^{1/\sigma} \right\rceil - 2\sigma + 1$. As $a < \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + 1$, this implies $UBC(n, \sigma) < 2\sigma \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + 1$.

□

In particular we get

Corollary 5.4 *If $c^+ = c^- = c$ then*

$$\frac{n^{\frac{1}{2c}}}{2} \leq \vec{D}(C_n, c) < 4c \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2c}} + 1.$$

5.3.2 Case $c = 1$

In the case of capacity 1 we have been able to determine $\vec{D}(C_n, 1)$ up to an additive constant.

Proposition 5.5

$$2\sqrt{2n} - \mathcal{O}(1) \leq \vec{D}(C_n, 1) \leq 4 \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil - 3 < 2\sqrt{2n} + 1$$

The upper bound is the one given for the general case (see Fig. 5.3). We conjecture that this bound is tight.

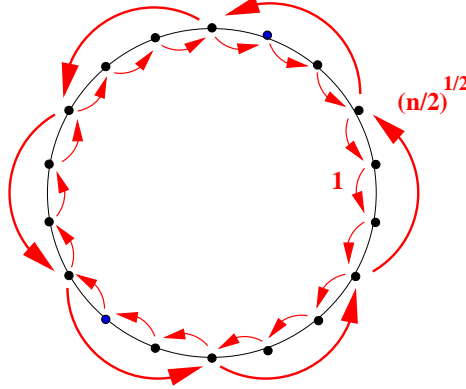


FIG. 5.3 – *Cycle capacity 1*

It would be desirable to obtain a simpler argument that could extend to higher capacities.

Note also that using lemma 5.2 from the starting condition $lb_C(n, 2) \geq 2\sqrt{2n} + \Theta(1)$ would slightly improve the lower bound on $lb_C(n, \sigma)$. The lower bound proof requires some care so we first give some definitions.

Let H be an optimal virtual digraph on G with respect to the capacity 1. The following definitions are given for the positive direction, but similar notions apply for the negative direction as well.

Definition 5.6 – The forward successor of a vertex x is denoted x^+ ,
– $[x, y]^+$ denotes the dipath from x to y in C_n in the positive direction,
– a path $Q = (e'_1, \dots, e'_q)$ from x to y in H is said to be of type $+$ if $[x, y]^+ \subset W(Q)$, where $W(Q)$ is the route in G associated to the dipath Q in H .

Definition 5.7 A circuit-bracelet of size n is a digraph A of order n constructed as follows (see Fig. 5.4):

- The digraph is made of a set of cycles $C_i, i \in I$ directed in a clockwise manner.
- For any i , C_i and $C_{i+1 \bmod I}$ share a unique vertex $v_{i+1 \bmod I}$.

- The length of the dipath in C_i from v_{i-1} to v_i is denoted p_i and is called the positive length of C_i ; similarly, the length of the dipath in C_i from v_i to v_{i-1} is denoted n_i and is called the negative length of C_i .
- We denote the successor of v_i in C_i by w_i , and the ancestor of v_{i+1} in C_i by z_i .

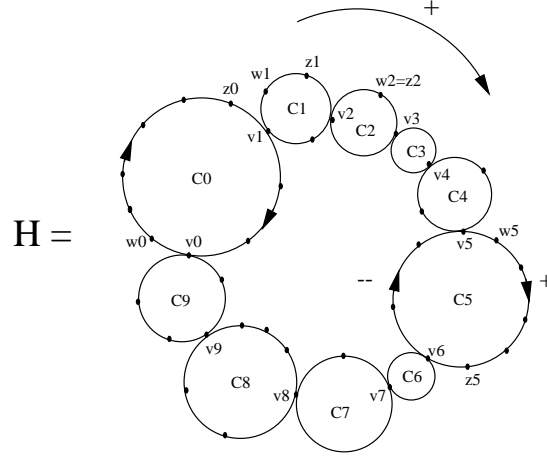


FIG. 5.4 – A circuit-bracelet

Let $f(n)$ be the minimal value of D_A , where A is any circuit-bracelet of size n . In the remaining of the section indices are taken modulo I .

Lemma 5.8 $f(n) = \vec{D}(C_n, 1)$

Proof. Notice that if an arc e of G is not used by a virtual dipath $P(e')$ with $e' \in E'$, we add a virtual arc e' such that $P(e') = (e)$. This transformation can only decrease the diameter of H , which is of no consequence since we only seek for a lower bound on the virtual diameter. Using this manipulation, we know that $\forall e \in E, \exists e' \in E'$ s.t. $e \in P(e')$. This implies

$$\sum_{e' \text{ arc of type } -} w(e') = \sum_{e' \text{ arc of type } +} w(e') = n. \quad (5.3)$$

Where $w(e')$ is the *dilation* of a VP e' , i.e. the length of $P(e')$.

Now, we show that : *If $e' = (x, y) \in E'$ is an arc of type + of dilation $w(e') \geq 3$ then all the arcs of type - between y^- and x^+ are of dilation 1.*

Since the capacity of any arc of G is 1, and there is already a virtual arc of type + between x and y , there is no virtual arc of type + ending at any vertex between x^+ and y^- . Since $H = (V, E')$ is strongly connected, there is at least one arc ending at each one of these vertices. These arcs are of type -. For the same reasons of capacity and connectivity, these virtual arcs are of dilation 1.

Due to this property it is easy to see that there exists a digraph isomorphism between H and a circuit-bracelet of size n (see Fig. 5.4).

□

Lemma 5.9 $f(n) = \Theta(\sqrt{n})$ and the total number of circuits in an optimal circuit-bracelet is also $\Theta(\sqrt{n})$.

Proof. By the construction of lemma 5.3, there exists a regular circuit-bracelet with diameter at most $2\sqrt{2n} + 1$, so $f(n) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$. Note that the size of any circuit in an optimal circuit-bracelet is at most $f(n) + 2 = \mathcal{O}(\sqrt{n})$, otherwise the distance from w_i to the second neighbor of v_i on the bigger cycle C_i is more than $f(n)$. Hence there are at least $\Omega(\sqrt{n})$ circuits. Moreover the total number of circuits is less than $2f(n) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$, otherwise there exist two vertices at distance more than $f(n)$. Thus $f(n) = \Omega(\sqrt{n})$ and the lemma follows. □

We first prove Proposition 5.5 for the special case of a *regular circuit-bracelet*, namely, a circuit-bracelet satisfying $n_i = 1$ for every i . The circuits of a regular circuit-bracelet all consist of a single arc of type $-$ and p_i arcs of type $+$. Remark that p_i is then the length of C_i . Let $g(n)$ denote the minimal value of D_A where A is any regular circuit-bracelet of size n .

Lemma 5.10 $g(n) = 2\sqrt{2n} + \mathcal{O}(1)$.

Proof. We prove here that $g(n) \geq 2\sqrt{2n} + \mathcal{O}(1)$. We assume that n is sufficiently large. Let p be an integer and D the diameter of the considered circuit-bracelet. Call a circuit *big* if its size is greater than $\frac{D}{p}$, *small* otherwise. Recall that the size of any circuit is less than $D + 2$. Let b denote the number of big circuits and s denote the number of small circuits. We have

$$n \leq s\frac{D}{p} + b(D + 2) \quad \text{and} \quad s + b \leq 2D. \quad (5.4)$$

Suppose that big circuits are ordered cyclically according to the circuit-bracelet structure: $C_{i_0}, C_{i_1}, \dots, C_{i_{b-1}}$ as shown on Fig. 5.4. Let $k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ and consider dipaths from w_{i_k} to $z_{i_{k+p}}$. In the positive direction the cost is $d_k \geq \sum_{j \in [k, k+p]} p_{i_j} - 2$; as these circuits are big, $p_{i_j} \geq \frac{D}{p}$ and hence $d_k \geq \frac{p+1}{p}D - 2 > D$ if $p < \frac{D}{2}$. So we must use the negative direction. The length is then $d'_k = p_{i_k} + p_{i_{k+p}} + b + s - (i_{k+p} - i_k) - 3 \leq D$. Summing on all the k 's we get:

$$\sum_{k=0}^{b-1} d'_k = 2(n - \delta) + b(b + s) - p(b + s) - 3b \leq bD.$$

Where δ denote the number of vertices in the small circuits.

So $\frac{2(n-\delta)}{b} + b + s - p - 3 \leq D$. Note now that $\delta \leq s\frac{D}{p}$, so

$$\frac{2n}{b} + b + s(1 - \frac{2D}{bp} - \frac{p}{b}) - p \leq D \quad (5.5)$$

If the coefficient of s in inequality (5.5) is positive then the left factor of that inequality is greater than $\frac{2n}{b} + b - p - 3$ which is greater than $2\sqrt{2n} - p - 3$. In turn, the coefficient of s is positive if $b \geq \frac{2D}{p} + p$.

(5.4) implies $n \leq 2\frac{D^2}{p} + 2bD$ and so $b \geq \frac{n}{2D} - \frac{D}{p}$. Using the fact that $D \leq 2\sqrt{2n}$, we obtain $b \geq \sqrt{2n} \left(\frac{p-16}{8p} \right)$. But

$$\sqrt{2n} \left(\frac{p-16}{8p} \right) \geq \frac{2D}{p} + p$$

if $\frac{p}{8} - 4 - \frac{p^2}{\sqrt{2n}} \geq 0$, and the latter inequality is true if $p \geq 33$ and n is large enough. It follows that $g(n) \geq 2\sqrt{2n} - 36$. □

Proposition 5.11

$$\vec{D}(C_n, 1) = f(n) = 2\sqrt{2n} + \Theta(1)$$

Proof. Recall that $D = \Theta(\sqrt{n})$. Consider a circuit-bracelet, and recall that $n_i + p_i \leq D + 1$, so that we can find an integer k such that $\sum_{i \in [1, k]} (n_i + p_i) \geq 2D + 1$ with $\sum_{i \in [1, k]} (n_i + p_i) = \Theta(\sqrt{n})$. Consider the shortest dipath from v_1 to v_{k+1} and suppose that it uses the positive direction; so $\sum_{i \in [1, k]} p_i \leq D$. It follows that $\sum_{i \in [1, k]} n_i > D$. So, the dipath from v_k to v_1 cannot use the negative direction, and must use the positive one. It follows that $\sum_{i \notin [1, k]} p_i \leq D$. Globally, $\sum p_i \leq 2D = \Theta(\sqrt{n})$. If we remove this $\Theta(\sqrt{n})$ vertices we obtain a regular circuit-bracelet with lesser diameter. It follows that $f(n) \geq g(n - \Theta(\sqrt{n})) = 2\sqrt{2n} \sqrt{1 + \Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})} = 2\sqrt{2n} + \Theta(1)$. A new constant appears here in the bound. □

5.4 Paths P_n

In this section the physical digraph G is the n -vertex symmetric directed path P_n .

For general c in the undirected case, the bounds obtained in [KKP97] are $\mathcal{O}(cn^{1/c})$, and these bounds translate into similar ones in the directed case. The construction presented next yields a bound of $\mathcal{O}(cn^{1/2c-1})$. Our bounds are valid for any capacity function c such that positive (resp., negative) arcs have capacity c^+ (resp., c^-) and the additional requirement $c^+ \geq 1, c^- \geq 1$. Let $\sigma = c^+ + c^-$.

Proposition 5.12

$$\frac{n^{\frac{1}{\sigma-1}}}{2} \leq \vec{D}(P_n, c) \leq 2(\sigma - 1) \left\lceil \left(\frac{n-1}{2} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \right\rceil - 2\sigma + 4$$

Proof. Let us first prove the lower bound. Let H be a c -DVPL of P_n . We say that a sub-path $[x, y]$ is *covered* by H if the dipaths from x to y and from y to x are both contained in (the VP corresponding to) some virtual arc.

First we show that if $[x, y]$ is covered then $D_H \geq lb_C(d(x, y), \sigma - 2)$. Indeed if $[x, y]$ is covered we identify x and y and collapse the path into a cycle of length $d(x, y)$, we then ignore the virtual paths covering $[x, y]$ (see the proof of lemma 5.2 for details). So doing we obtain a c' -DVPL for $C_{d(x, y)}$ with $c'^+ + c'^- = \sigma - 2$.

Now, consider two shortest dipaths in H , one from 0 to $n - 1$ and the second from $n - 1$ to 0. There are at most $2D_H$ intermediate points (including 0 and $n - 1$) on these two dipaths. Hence we can find two consecutive intermediate vertices x and y , with $[x, y]$ covered, such that $d(x, y) \geq \frac{n}{2D_H}$. Thus, if $m = \max\{d(x, y) \mid [x, y] \text{ is covered}\}$, we have $D_H \geq \frac{n}{2m}$. But due to the covering property $D_H \geq lb_C(m, \sigma - 2)$. Hence $lb_P(m, \sigma) \geq \max(\frac{n}{2m}, lb_C(m, \sigma - 2))$. Using the lower bound on $lb_C(m, \sigma)$ given in Proposition 5.1, and maximizing in m , completes the lower bound proof.

To prove the upper bound, we construct a DVPL based on the best DVPL we know on the cycle C_{n-1} with $c'^+ = c^+$ and $c'^- = c^- - 1$. In this DVPL, no VP passes over vertex 0. So, we cut the cycle at vertex 0 and consider it as the path P_n . On the negative direction, we add a VP of dilation n from $n - 1$ to 0 (See Fig. 5.5). The added VP is used at most once in any path on H ; specifically, it is not needed for paths from x to y if $x < y$, and it is used on a path from x to y when $y < x - n/2$, in which case the shortest $x - y$ dipath in H goes via $n - 1$. The bound is the same as the one for the cycle C_{n-1} with capacity $\sigma - 1$ plus 1.

□



FIG. 5.5 – P_n , $c = 2$

5.5 Complete Symmetric k-ary Trees $T(k, h)$

In this section the physical digraph G is $T(k, h)$, the directed symmetric complete k -ary tree of depth h rooted at r_0 . Recall that in a complete k -ary tree, each nonleaf vertex has exactly k children. The *depth* of a vertex is its distance from the root, and the depth of the tree is the maximum depth of any of its vertices. The root r_0 is the only vertex of in and out-degree k . $T(k, h)$ has $\frac{k^{h+1}-1}{k-1}$ vertices and diameter $2h$.

The *ancestors* of a vertex x are all vertices except x on the shortest path connecting r_0 and x . The deepest ancestor of a vertex is its *parent*, denoted by

$f(x)$. A vertex y is said to be *below* x if $\exists i \geq 0$ s.t. $f^i(y) = x$. Note that x is below itself.

Proposition 5.13

$$2 \left\lfloor \frac{h-1}{\lfloor \log_k c \rfloor + 1} \right\rfloor + 1 \leq \vec{D}(T(k,h),c) \leq 2 \left\lfloor \frac{h}{\lfloor \log_k c \rfloor + 1} \right\rfloor + 2$$

Proof. Let us start with proving the lower bound. Let H be a c -DVPL of $T(k,h)$. Let $\gamma = \lfloor \log_k c \rfloor + 1$. Let r be a vertex of depth d , $1 \leq d \leq h - \gamma$; Let $B(\gamma, r)$ denote the complete k -ary subtree of $T(k,h)$ of depth γ rooted at r . A leaf x of $B(\gamma, r)$ is said to be *upward-bad* for r if there does not exist any virtual arc e' that starts in a vertex below x and ends in a vertex not below r . If there doesn't exist any virtual arc e' that starts not below r and ends below x then x is said to be *downward-bad* for r . We claim the following: *For any vertex r of depth d , $1 \leq d \leq h - \gamma$ there*

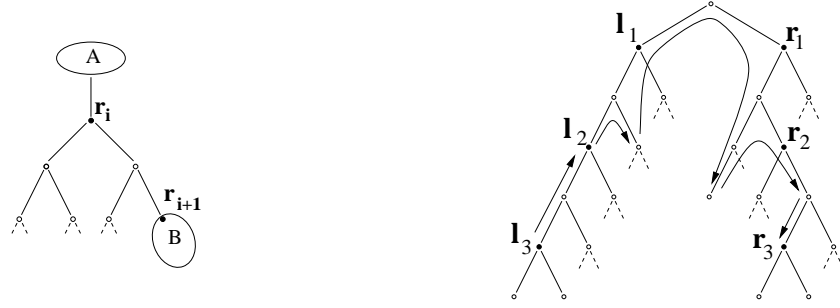


FIG. 5.6 – $k = 2$, $c = 2$ or 3 , $\gamma = 2$, there exist no arcs from A to B ; (on the right) $k = 2$, $\gamma = 2$, $h = 6$, one cannot do better than 5 from l_3 to r_3

exist an upward-bad vertex and a downward-bad vertex for r .

Indeed, suppose that all the k^γ leaves of $B(\gamma, r)$ are not upward-bad. There exists a virtual arc that starts below each leaf and ends not below r . Then the load of the arc $(r, f(r))$ is at least k^γ . Contradicting the fact that the capacity of this arc is $c < k^{\lfloor \log_k c \rfloor + 1}$, there exists at least one leaf that is upward-bad for r . The same argument considering the load of arc $(f(r), r)$ completes the proof of the claim.

Now we prove that $D_H \geq 2(\lfloor \frac{h-1}{\gamma} \rfloor) + 1$. Let $i_0 = \lfloor (h-1)/\gamma \rfloor + 1$. Define two sequences of vertices $(l_i)_{i=1..i_0}$ and $(r_i)_{i=1..i_0}$ as follows. Let l_1 and r_1 be the leftmost and the rightmost neighbors of r_0 , respectively. If $i \leq i_0 - 1$, choose for l_{i+1} a leaf of $B(\gamma, l_i)$ which is an upward-bad vertex for l_i . By induction, the depth of l_i is $1 + \gamma(i-1)$ and if $i \leq i_0 - 1$ it is less than $h - \gamma$ so, from the claim, l_{i+1} exists. Symmetrically, we define the sequence $(r_i)_{i=1..i_0}$ by choosing r_{i+1} as one of the downward-bad vertices for r_i .

Let us now consider the shortest path \mathcal{P} in H from l_{i_0} to r_{i_0} . Let y be the first vertex of \mathcal{P} not below l_1 . By construction, \mathcal{P} uses at least i_0 virtual arcs from l_{i_0}

to y . Also x , the predecessor of y in \mathcal{P} , is below l_1 and thus not below r_1 . Hence, \mathcal{P} uses at least i_0 virtual arcs from x to r_{i_0} . In summary, \mathcal{P} uses at least $2i_0 - 1$ virtual arcs. So $D_G \geq 2i_0 - 1$ that is $2(\lfloor (h-1)/\gamma \rfloor) + 1$.

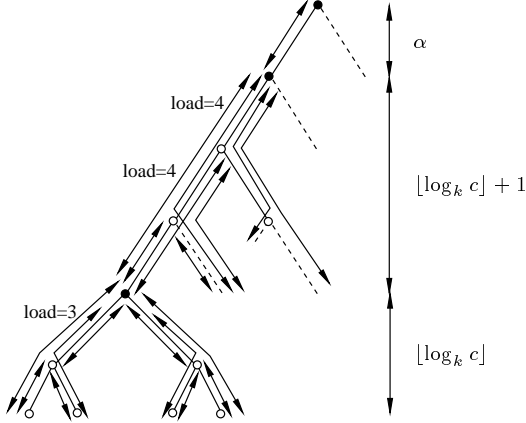


FIG. 5.7 – Binary Tree, $c = 4$, $h = 6$

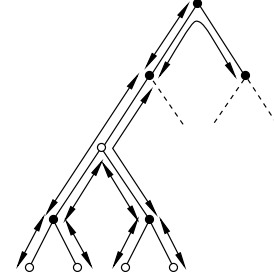


FIG. 5.8 – Case $c = 2$, $k = 2$

To establish the upper bound, we describe a symmetric layout. An example is illustrated in Fig. 5.7. Each vertex of depth more than $h - \lfloor \log_k c \rfloor$ is linked (by directed edges in both directions) to all its descendants. The load induced is less than $\frac{k^{\lfloor \log_k c \rfloor} - 1}{k - 1} \leq c$. Each vertex of depth exactly $h - \lfloor \log_k c \rfloor - t(\lfloor \log_k c \rfloor + 1)$ with $t \geq 0$ is linked (by directed edges in both directions) to all its ancestors of depth more than $h - \lfloor \log_k c \rfloor - (t + 1)(\lfloor \log_k c \rfloor + 1)$. If $h = \lfloor \log_k c \rfloor + t(\lfloor \log_k c \rfloor + 1) + \alpha$ with $t \geq 0$ and $0 \leq \alpha < \lfloor \log_k c \rfloor + 1$, the diameter is $2(t + 1)$ if $\alpha = 0$ and $2(t + 2)$ if $\alpha > 0$, that is $2 \left\lfloor \frac{h}{\lfloor \log_k c \rfloor + 1} \right\rfloor + 2$.

In the special case of $c = 2$, $k = 2$ we add two VPs between the two neighbors of the root as shown on Fig. 5.8. We get an upper bound of $h + 1$.

Let us remark that a similar upper bound is derived in [SV96], using a slightly different construction. The essential difference between the two constructions is that we connect a node at a certain depth to all its ancestors having more than a certain depth, whereas the construction of [SV96], connects a node at a certain depth to all its descendants of less than a certain depth. As a result, the construction of [SV96] achieves the same diameter bounds as ours, at a slightly higher capacity cost (namely, larger by a factor of roughly $1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots$). For example, for the binary tree of depth 5, the construction of [SV96], depicted in Fig. 1 therein yields a diameter bound of 6 with capacity 3, whereas our construction for the same tree will achieve the same diameter bound using only 2 capacity units.

□

5.6 Arbitrary Trees

In this section the physical graph G is T a tree rooted at r . We assume that $\forall e \in E$, $c(e) = c^+ \geq 1$ if e is an arc going up (from a vertex to its parent) and $c(e) = c^- \geq 1$ if e is an arc going down. Again, it turns out that our bound can be expressed as a function of $\sigma = c^+ + c^-$, and therefore it is convenient to define $ub_T(\sigma)$ as an upper bound on $\vec{D}(T, c)$ valid if c satisfies $c^+ + c^- = \sigma$ and $g(\sigma, n)$ an upper bound on $ub_T(\sigma)$ valid if T has n vertices. By the definition, $\vec{D}(T, c) \leq ub_T(\sigma) \leq g(\sigma, n)$.

The lower bound follows from our bound for the n -vertex path P_n , upon noting the following. Let D_T denote the depth of T .

Proposition 5.14

$$\vec{D}(T, c) \geq \vec{D}(P_{D_T}, c) \geq (D_T)^{\frac{1}{2c-1}} / 2$$

Proof. Let H be an admissible virtual graph on T . Let u and v be two vertices at maximum distance, $d_T(u, v) = D_T$. Consider the shortest dipath \mathcal{Q} in T from u to v .

We build a DVPL on \mathcal{Q} based on H . To each VP $P(e')$ on T is associated a VP on \mathcal{Q} that is the intersection of $P(e')$ and \mathcal{Q} (i.e. the dipath formed by all the common arcs of $P(e')$ and \mathcal{Q}). Since T is a tree, the intersection of two paths is a well-defined path.

Thus, H induces a DVPL on \mathcal{Q} that loads physical arcs no more than the original DVPL on G . Furthermore the diameter of this new DVPL is no more than the diameter of the original one. □

Proposition 5.15

$$\vec{D}(T, c) \leq \vec{D}(C_{2n-2}, c/2) \leq 2c(n-1)^{1/c} + 1$$

Proof. This natural upper bound follows by embedding a cycle around the tree. Consider a cycle C_{2n-2} embedded around the tree T in a depth-first fashion. Let $c^+ = \lceil c/2 \rceil$ and $c^- = \lfloor c/2 \rfloor$. Using Proposition 5.1, an admissible graph H on C_{2n-2} with respect to c^+ on positive arcs and c^- on negative ones gives us an admissible virtual graph on T . □

Our main DVPL construction for trees makes use of ρ -dominating sets. Hence to establish an upper bound on $\vec{D}(T, c)$, we need the following two preliminary lemmas regarding the existence of small ρ -dominating sets in arbitrary trees.

Definition 5.16 *Let ρ be a positive integer. A ρ -dominating set is a subset S of $V(T)$ such that for all $x \in V(T)$, $d(x, S) \leq \rho$*

Lemma 5.17 *For any ρ , there exists a ρ -dominating set of cardinality at most $\frac{n-1}{\rho+1} + 1$.*

Proof. Let $L_i = \{x \in T ; d(x, r) = i\}$ for $i = 0..D_T$ and $V_j = \bigcup_{i=j \bmod (\rho+1)} L_i \cup \{r\}$ for $j = 0..\rho$.

Each V_j is a ρ -dominating set and the family $(V_j - \{r\})_{j=0..\rho}$ is a partition of $V(T) - \{r\}$. Thus, by choosing the V_j of smallest cardinality, we get lemma 5.17. \square

Lemma 5.18 *For any ρ , there exists a ρ -dominating set S of cardinality at most $2 \frac{n-1}{\rho+1}$ such that the paths from a vertex of S to its deepest ancestor in S are pairwise arc-disjoint.*

Proof. Let S be a ρ -dominating set of cardinality s_0 . We apply the following algorithm to S :

Initialization $S' := S$.

while there exist two distinct vertices x and y in S' such that the deepest common ancestor z of x and y is not in S **do**

begin

 Choose a triple x, y, z such that the depth of z is maximum.

$S' := (S' - \{x, y\}) \cup \{z\}$.

$S := S \cup \{z\}$.

end

Since the initial set S is a ρ -dominating set, the final set S , that contains the initial one, is also a ρ -dominating set.

Since r can never be deleted from S' , the cardinality of S' must be at least 3 (r, x and y) to enter the loop. Thus, since at each step of the algorithm $|S'|$ decreases by 1, the algorithm terminates at most after $s_0 - 2$ steps. Since at each step $|S|$ increases by 1, the final set S has cardinality at most $2s_0 - 2$. By lemma 5.17 if the initial set S is minimal then $s_0 \leq \frac{n-1}{\rho+1} + 1$ and thus the cardinality of the final set S is no more than $2 \frac{n-1}{\rho+1}$.

It remains to prove that paths from a vertex of S to its deepest ancestor in S are pairwise arc-disjoint. Let t and u be two vertices in S such that this condition fails. Let w be their deepest common ancestor. w is not in S . We can suppose that there is no vertex of S between t (resp. u) and w . Otherwise, replace t (resp. u) by the last vertex of S on the dipath from t (resp. u) to w . Since t and u are in the final set S , they both have been in some set S' . Since the algorithm is completed t and u are not both in the final S' . W.l.o.g we can suppose that t is deleted from S' before u . Let i be the step of the algorithm where t is deleted from S' , let t and y be the two vertices chosen by the algorithm at step i and let z is their deepest common ancestor. Since after step i , z is in S and w is below the lowest ancestor of t in the final S , w is strictly below z . Since at the end of the algorithm u is in

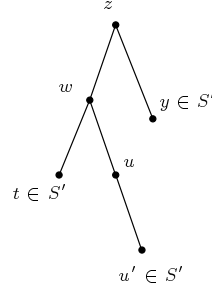


FIG. 5.9 – *Step i of the algo*

S , there exists a vertex u' in S' such that w is the deepest common ancestor of u' and t . The triple (t, u', w) should have been chosen instead of (t, y, z) and thus w should be in the final set S . This contradicts our hypothesis and completes the proof of lemma 5.18. \square

Proposition 5.19

$$\vec{D}(T, c) \leq 5\sigma n^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

Proof. The proof is by induction. We first construct a ρ -dominating set S of representative vertices in T using lemma 5.18. Hence every vertex is at distance at most ρ from S , and the paths between a vertex of S and its deepest ancestor in S are arc-disjoint. Then we construct a DVPL by induction on σ , i.e., we apply induction on a tree built on the set S with capacity $\sigma - 1$.

Given S , let T' be the tree rooted at r defined by $V(T') = S$ and

$$A(T') = \{(s, s'), (s', s) \mid s' \text{ is the deepest ancestor of } s \text{ in } S\}.$$

An arc of T' corresponds to a path in T . By lemma 5.18 arcs of T' correspond to arc disjoint paths in T and $|V(T')| \leq 2 \frac{|V(T)|-1}{\rho+1}$.

The DVPL is built as follow.

If $c^+ \geq c^-$ then

All arcs of T from a vertex to its parent are VPs.

All arcs of T from a vertex that is not an ancestor of a vertex of S to its child are VPs.

We construct the DVPL for the tree T' with capacities $c'^+ = c^+ - 1$ and $c'^- = c^-$.

else

All arcs of T from a vertex to its child are VPs.

All arcs of T from a vertex that is not an ancestor of a vertex of S to its parent are VPs.

We construct the DVPL for the tree T' with capacities $c'^+ = c^+$ and $c'^- = c^- - 1$.

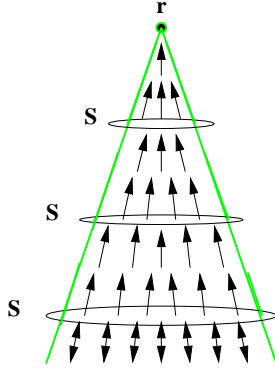


FIG. 5.10 – A step in the construction of the DVPL. case 1, $c^+ \geq c^-$.

To go from a vertex u to a vertex v in the virtual graph, we go from u to a vertex in S in at most ρ steps and then move on the virtual graph built on T' (in at most $\vec{D}(T', c')$ steps) and then go from a vertex in S to v in at most ρ steps. So, $\vec{D}(T, c) \leq 2\rho + \vec{D}(T', c')$.

For an arbitrary tree with capacity 1 on each link, the trivial VPL (where each arc becomes a VP) has diameter at most n .

$\vec{D}(T, c) \leq 2\rho + \vec{D}(T', c')$. Thus, $\forall T$, $\vec{D}(T, c) \leq 2\rho + g(\sigma - 1, 2\frac{n-1}{\rho-1})$ and thus, $g(\sigma, n) \leq 2\rho + g(\sigma - 1, 2\frac{n-1}{\rho-1})$.

Let us show by induction that $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ such that $\forall n \geq N$, $g(\sigma, n) \leq (4 + \epsilon)\sigma n^{\frac{1}{\sigma-1}}$. The assertion is true for $c = 1$ (i.e. $\sigma = 2$). Suppose it is true for $\sigma - 1$. Then

$$g(\sigma, n) \leq 2\rho + (4 + \epsilon)(\sigma - 1) \left(2\frac{n-1}{\rho-1}\right)^{\frac{1}{\sigma-2}}.$$

Let $\rho = 2(n-1)^{\frac{1}{\sigma-1}} + 1$. Then

$$\begin{aligned} g(\sigma, n) &\leq 4(n-1)^{\frac{1}{\sigma-1}} + 2 + (4 + \epsilon)(\sigma - 1)(n-1)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &= (4 + \epsilon)\sigma(n-1)^{\frac{1}{\sigma-1}} + 2 - \epsilon(n-1)^{\frac{1}{\sigma-1}}. \end{aligned}$$

For $c = o(n)$ we get $g(\sigma, n) \leq (4 + \epsilon)\sigma n^{\frac{1}{\sigma-1}}$ for n greater than some N .

Taking $\epsilon = 1$ completes the proof of the Proposition ($N = 2^{\sigma-1} + 1$).

□

In particular we have

Corollary 5.20 *If $c^+ = c^- = c$ then $\vec{D}(T, c) \leq 10cn^{\frac{1}{2c-1}}$.*

Our final construction is given in the following claim.

Proposition 5.21

$$\vec{D}(T, c) \leq \vec{D}(P_{D_T}, c) \cdot \log n = \mathcal{O}(c \cdot D_T^{1/(2c-1)} \cdot \log n)$$

Proof. Construct an admissible virtual graph H on T by recursively decomposing T using tree separators. A separator node $S(T)$ breaks T into subtrees of cardinality less than $n/2$. It is well-known that such a separator always exists, and can be found via the following straightforward algorithm. Start with an arbitrary node as $S(T)$. While $S(T)$ does not break the tree T into subtrees of cardinality less than $n/2$, one of the considered subtrees is of cardinality strictly more than $n/2$, move $S(T)$ to its neighbor in this subtree. This node is shown to be the *median* of the tree in [Zel68] and [GZ94a].

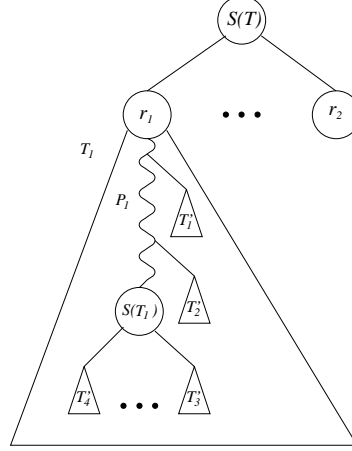


FIG. 5.11 – *Tree Layout*

Let T_i be a subtree of T rooted at r_i and v_i be the only neighbor of r_i that is not in T_i . We describe here a procedure $A(T_i)$, used for constructing H .

1. find $S(T_i)$
2. apply the optimal path layout to the path P_i from v_i to $S(T_i)$.
3. consider the trees $(T'_i)_{i=1..k}$ made of arcs not already involved in the layout rooted at a neighbor of $S(T_i)$ or of a vertex of P_i .
4. apply $A(T'_i)$ to each subtree T'_i that is not only one vertex.

The construction of H is as follows.

1. find $S(T)$
 2. recursively apply $A(T_i)$ on each subtree.
- (Note that for the first use of the algorithm, $v_i = S(T)$.)

To analyze the diameter of the resulting virtual graph H , let

$$f(n) = \max_{T \text{ rooted at } r, |T|=n} \max_x (d_H(r, x), d_H(x, r)).$$

At this point, it is possible to derive a result very similar to that of Proposition 5.19, by observing that $f(n)$ can be bounded recursively by

$$f(n) \leq f(n/2) + \vec{D}(P_n, c).$$

This yields that there exists $\alpha(c)$ such that $f(n) \leq \alpha(c) \cdot n^{\frac{1}{2c-1}}$. Indeed, $\vec{D}(P_n, c) \leq (4c-2) \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{1}{2c-1}} + 2$ and thus for $\alpha(c) \geq 8c$ the result is proved by induction. For $c = 2$ it gives $f(n) \leq 16n^{1/3}$ and thus $\vec{D}(T, 2) \leq 32n^{1/3}$.

However, for low-depth trees T it may be preferable to use a different recursive bound for $f(n)$, namely,

$$f(n) \leq f(n/2) + \vec{D}(P_{D_T}, c),$$

which gives the following upper bound: $f(n) \leq \vec{D}(P_{D_T}, c) \cdot \log n$. □

5.7 Toroidal Meshes and Meshes

5.7.1 Toroidal Meshes

In this section we consider as our physical digraph G the toroidal mesh of dimensions $a \times b$, $TM(a, b)$. Recall that $TM(a, b) = C_a \square C_b$, the Cartesian sum (also called product) of two cycles.

Proposition 5.22

$$\vec{D}(TM(a, b), c) \leq 4(2c-1) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2c-1}} + 4ac \left(\frac{b}{2}\right)^{1/2ac} + 2a + 1$$

Proof. $TM(a, b)$ can be viewed as composed of a different *main cycles* of length b each, numbered from 1 to a and connected to each other cyclically by b *transversal cycles* numbered from 1 to b .

On a cycle of length b , the best ac -DVPL we have is the one built in section 5.3. This DVPL is made of VPs of $2ac$ different lengths, $\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{i}{2ac}}$ for $0 \leq i \leq 2ac-1$. Its diameter is $D_m \leq 4ac \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2ac}} + 1$.

The DVPL we build on $TM(a, b)$ is based on this one. On the i -th main cycle (of length b), we build VPs of $2c$ different lengths

$$\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2(i-1)c}{2ac}}, \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2(i-1)c+1}{2ac}}, \dots, \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2ic-1}{2ac}},$$

in alternating directions, i.e., one in the positive direction and the next in the negative direction. The load is c .

On the b transversal cycles, we build the best DVPL we have with $c^+ = c$ and $c^- = c-1$, as described in section 5.3.1. The construction sets up VPs of $2c-1$ different lengths

$$1, \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2c-1}}, \dots, \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2c-2}{2c-1}},$$

again in alternating directions. Hence the load is c in the positive direction and $c - 1$ in the negative one. The remaining unit of capacity in the negative direction is used to build VPs of length 1.

Finally, we have VPs of length 1 in both the directions on the transversal cycles and the virtual diameter of transversal cycles is $D_t \leq 2(2c - 1) \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2c-1}} + 1$.

To move from $[i, j]$ to $[i', j']$, we first reach the first main cycle where we find main VPs of length $1, \frac{b}{2}, \dots, \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2c-1}{2ac}}$. It costs at most D_t hops to reach $[1, j]$. Then, we move to $[1, j']$ using main VPs of increasing then decreasing dilation and moving between main cycles using transversal VPs of dilation 1. It costs at most $2(a - 1) + D_m$. We then reach $[i', j']$ in at most D_t hops. Finally, we get an upper bound on the virtual diameter of $2D_t + D_m + 2(a - 1)$. □

An interesting question that one may raise concerns the extremal behavior of virtual graphs. In particular, are there graph families of very high diameter that admit very low diameter virtual graphs using low capacity? It turns out that in order to get a graph G such that $\vec{D}(G, c) \sim \log n$ with $c \geq 1$ we can use a toroidal mesh $TM(\log n, \frac{n}{\log n})$. We have the following:

Proposition 5.23 *There exists an infinite family of digraphs with n vertices and diameter $n/\log n$, such that $\vec{D}(G, 1) = \Theta(\log n)$.*

Proof. The upper bound follows from Proposition 5.22 taking $a = \log n$ and $b = \frac{n}{\log n}$. The lower bound of $\log n$ is proved in section 5.8. □

5.7.2 Meshes

For $\lceil \log_2 b \rceil \leq a \leq b$ we do not need the toroidal structure to get a good upper bound. We present here a VPL on a mesh $M(a, b) = P_a \square P_b$ that leads to the following bound.

Proposition 5.24 *For a mesh $M(a, b)$ with $\lceil \log_2 b \rceil \leq a \leq b$,*

$$\vec{D}(M(a, b), 1) = \mathcal{O}(\log n)$$

Proof. Construct an admissible virtual graph H on $M(a + 1, b + 1)$ by patching together a number of *strips*, defined as follows. Let $A = \lceil \log_2 b \rceil$, $B = \lceil \log(a - A + 1) \rceil$, and $C = b + 1 - \lfloor \frac{b+1}{B} \rfloor B$. H is made of a horizontal strip of width A , and $\lfloor \frac{b+1}{B} \rfloor$ vertical strips of width B . (See Fig. 5.12.) Also, there is a last “remainder” strip of width C . A horizontal strip of width k is made of k rows, where row i , $1 \leq i \leq k$ uses horizontal symmetric arcs of dilation 2^{i-1} . (See Fig. 5.13.) A vertical strip is similarly defined for vertical virtual arcs. All physical arcs that are not used in virtual arcs involved in the strips are used as virtual arcs of length 1. An example of this construction is depicted in Fig. 5.14. We next show that the diameter of

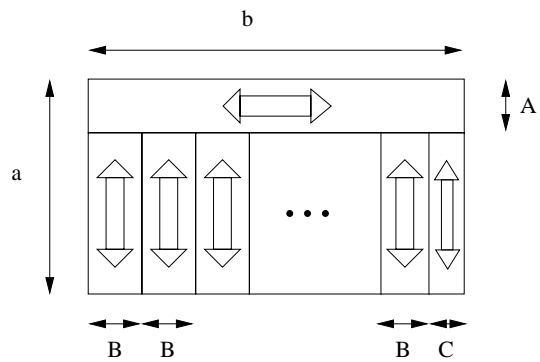


FIG. 5.12 – *Position of the strips*

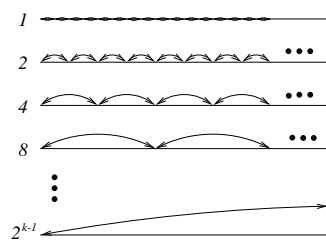


FIG. 5.13 – *Composition of a strip*

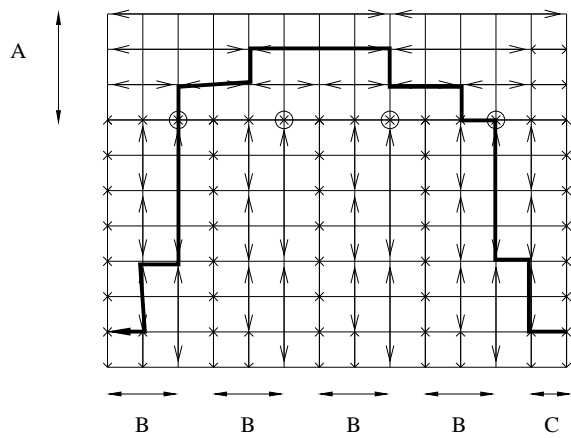


FIG. 5.14 – $M(10,13)$, $A = 4$, $B = 3$, $C = 2$

such a graph is at most $10A + 4B + 4C$. Towards that proof, define special vertices named *main points*. These are the vertices on the A th line from the top, at columns that are multiples of B from the left. The routing strategy is based on reaching a main point from the initial vertex, then reaching the main point closest to the destination vertex using virtual arcs of the horizontal strip, and finally reach the destination point itself. As illustrated in Fig. 5.15, to reach a main point in a strip

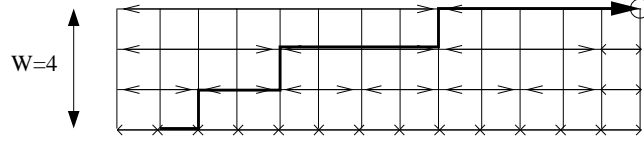


FIG. 5.15 – *How to move in a strip*

of width W , one needs at most $l(W) = 2W - 1$ hops.

If the initial vertex is in one of the vertical strips of width B then one needs at most $l(B)$ hops to reach the first main point. If the initial vertex is in the vertical strip of width C then one needs at most $l(C) + l(B)$ hops to reach the first main point. If the initial vertex is in the horizontal strip of width A then one needs at most $A + 2l(A)$ hops to reach directly the second main point. From the first main point to the second, one needs at most $2l(A) - 1$ hops. In summary, in the worst case, one does not need more than $2l(B) + 2l(C) + 2A + 4l(A)$ hops, that is, at most $10A + 4B + 4C \leq 9 \log n$.

□

The problem was given a solution in the undirected case for $c \geq 2$ and $a = b = \sqrt{n}$ in [SV96]. The diameter bound obtained therein is $\mathcal{O}(\log n / \log c)$. Note that our construction can also be transformed into a solution for the directed case, using $c = 1$ units of capacity, for any a and b such that $\lceil \log_2 b \rceil \leq a \leq b$.

5.8 General Bounds

As the diameter of a random graph is constant with high probability [Bol78], it is clear that for most digraphs $\vec{D}(G, c)$ is at most logarithmic even for $c = 1$. Hence the ratio $\frac{\vec{D}(G, c_0)}{\log n}$ is of importance. For d -bounded degree digraphs¹, a classical result states that $\frac{\log n}{\log(c_0 d)} - 1 \leq \vec{D}(G, c_0)$. It is obtained by applying the Moore bound to the virtual digraph with n nodes, degree at most $c_0 d$, and diameter $\vec{D}(G, c_0)$ (see [KKP97, SV96]). Note also that $\vec{D}(G, 1) \leq D_G$. Here we derive a tighter bound related to the expansion-congestion parameters of G . First we recall three standard definitions. A *routing* for G is a mapping associating with each ordered pair of

1. where both the in- and out- degrees are upper-bounded by d

vertices (x, y) a *route* (i.e. a dipath in G) from x to y ; the *congestion* of a routing is the maximal *load* of an arc of G (i.e., the maximum number of routes going through an arc); the *arc-forwarding index* of G , denoted $\pi(G)$, is the minimum congestion over all possible routings.

The parameter $\pi(G)$ has been extensively studied and many relations exist between π and other parameters like bisection or expansion, see [HMS89, MT96, Sol95]. There are strong relationships between $\pi(G)$ and the DVPL issue. A routing for G is a DVPL of G where H is the complete digraph, and so $\pi(G)$ is the smallest integer c_0 such that $\vec{D}(G, c_0) = 1$.

Proposition 5.25 *Let G be a d -bounded digraph.*

$$\frac{\log \pi(G)}{\log(c_0 d)} + O(\log \vec{D}(G, c_0)) \leq \vec{D}(G, c_0)$$

Proof. With every c_0 -DVPL H of G one can associate a routing for G as follows. Note that for any ordered pair of vertices (x, y) there exists at least one dipath in H from x to y with length smaller than D_H . We select one such dipath and choose the associated real dipath as the route from x to y . Due to the capacity constraint, at most $c_0 d$ virtual dipaths enter (resp., leave) any given vertex of G ; one can easily check that the number of dipaths in H of length k that use an arc is at most $k c_0 (c_0 d)^{k-1}$. Hence the congestion of our routing is upper-bounded by

$$M = c_0 + 2c_0(c_0 d) + 3c_0(c_0 d)^2 + \dots + D_H c_0 (c_0 d)^{D_H-1}.$$

By definition, $\pi \leq M$; as $M \leq c_0 \frac{D_H (c_0 d)^{D_H}}{c_0 d - 1}$, taking the logarithm we obtain the result. □

Let us remark that the lower bound of proposition 5.25 is rather similar to the one derived on the gossip time of a network under WDM or wormhole models [DP96, BGP⁺96]. In both cases one must construct a route between any pair of vertices: for gossip problems the route is built along T time steps, whereas in the context of DVPL design it is constructed by using $\vec{D}(G, c)$ jumps.

Also note that the above lower bound, which is expressed according to π , can be easily turned into a bound involving more classical graph parameters like edge expansion, bisection, treewidth etc., by using appropriate relations between π and these parameters (see [HMS89]). Indeed, a standard “crossing demand argument” shows that $\pi \geq \frac{n^2}{4B}$ where B is the edge bisection, and duality of multicommodity flow proves that $\pi \geq \frac{\sum_{x, y \in V} d(x, y)}{|E|}$. As an example, it follows that $\pi \geq \Omega(n^{1+1/\delta})$ in a graph with genus δ . More generally, there exists a tight relation between π and the minimum sparsity ratio (see [LR88]).

The following proposition is the counterpart of proposition 5.23, and in some sense establishes its tightness. Specifically, it indicates that for *bounded* c_0 , one can

expect $\vec{D}(G, c_0)$ to be logarithmic only if D_G is not too large. The result is valid for (distance-) symmetric digraphs (namely, such that $d(x, y) = d(y, x)$).

Proposition 5.26 *Let G be a symmetric bounded degree digraph with $\log D_G = \Omega(\log n)$.*

$$\vec{D}(G, c) = \Theta(\log n) \implies c = \Omega(D_G \log n / n)$$

In particular, if c is constant

$$\vec{D}(G, c) = \Theta(\log n) \implies D_G = O(n / \log n).$$

Proof. The idea is that the design of an efficient DVPL is prevented by the existence of a long geodesic dipath contained in G . Let us first formalize the notion that a digraph “contains” some bad sub-structure.

Define a *retraction* of a digraph G as a digraph G' such that there exists a mapping f from $V(G)$ onto $V(G')$ satisfying the following *contraction* condition: $d_G(x, y) \geq d_{G'}(f(x), f(y))$.

Define the *total load* of G for virtual diameter D_0 as

$$\mathcal{L}(G, D_0) = \min \left(\sum_{e \in E} l(e) \right)$$

, where the minimum is taken on all DVPL such that $D_H \leq D_0$.

Due to the contraction condition, for any retraction G' of G we have $\mathcal{L}(G, D_0) \geq \mathcal{L}(G', D_0)$. Moreover, denoting the number of arcs of G by $|E|$, the maximum load is greater than or equal to the average load. Hence we have proved the following.

Lemma 5.27 *If G' is a retraction of G then*

$$\pi(G, D_0) \geq \frac{\mathcal{L}(G, D_0)}{|E|} \geq \frac{\mathcal{L}(G', D_0)}{|E|}.$$

Next, we claim that the path P_{D_G} of length D_G is a retraction of G . To prove this, consider the following mapping. Label the vertices of P_{D_G} by $0, 1, \dots, D_G$, and choose a pair of vertices (x, y) of G such that $d(x, y) = d(y, x) = D_G$; then map any vertex at distance i from x onto vertex i of the path. Due to the triangle inequality, and to symmetry, the mapping is contracting.

Now, suppose that we are given a bounded degree digraph G with $\log D_G = \Theta(\log n)$, and the capacity function c_0 . Consider any DVPL with diameter $D_H = \Theta(\log n)$. By lemma 5.27 we have $c_0 \geq \mathcal{L}(P_{D_G}, D_H) / |E|$. We also know that if $D_0 \sim \log D_G$ then $\mathcal{L}(P_{D_G}, D_0) \sim D_G \log D_G$ [Zak97]. It follows that $c_0 \geq D_G \log D_G / |E|$. As $|E| \leq nd$, we obtain $c_0 \geq \frac{D_G \log n}{dn}$. □

5.9 Open problems and directions

Some of our bounds are not tight, and the remaining gaps may be narrowed. Establishing upper and lower bounds on \vec{D} for other families of graphs may also be interesting and useful.

Looking for the minimum diameter is reasonable when all the connections may be requested with roughly the same probability, which is also not always realistic. In case of non-uniform traffic, instead of studying \vec{D} , one may try to optimize its weighted counterpart, $\sum r(i,j) \cdot d_H(i,j)$, where $r(i,j)$ denotes the traffic requirements between i and j ; such a target function may make it desirable to place the VPs between the node pairs which communicate the most.

Finally, there may be other parameters of the directed ATM model worth studying. One may also consider variations on the model with variable capacity of the VPs.

Acknowledgments

The authors would like to thank Amotz Bar-Noy, Bruno Beauquier, Pascal Chanas, Michele Flammini, Cyril Gavoille and Daniel Kofman for helpful discussions.

Bibliographie

- [ABC⁺97] W. Aiello, S. Bhatt, F. Chung, A. Rosenberg, and R. Sitaraman. Augmented ring networks. *J. Math. Modelling and Scientific Computing*, 1997.
- [BBGG97] L. Becchetti, P. Bertolazzi, C. Gaibisso, and G. Gambosi. On the design of efficient ATM routing schemes. manuscript, 1997.
- [BCG98] M. Bulet, P. Chanas, and O. Goldschmidt. Optimization of VP layout in ATM networks. In preparation, 1998.
- [BGP⁺96] J-C. Bermond, L. Gargano, S. Perennes, A. Rescigno, and U. Vaccaro. Effective collective communication in optical networks. In *Proceedings of ICALP 96*, volume 1099 of *Lecture Notes In Computer Science*, pages 574–585. Springer Verlag, July 1996.
- [Bol78] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory*. Academic Press, 1978.
- [CG98] P. Chanas and O. Goldschmidt. Conception de réseau de VP de diamètre minimum pour les réseaux ATM. In *Road-f'98*, pages 38–40, 1998.
- [Cha98] Pascal Chanas. *Dimensionnement de réseaux ATM*. PhD thesis, CNET Sophia, Sept. 1998. In preparation.
- [De 95] Martin De Pricker. *Asynchronous Transfer Mode, Solution for Broadband ISDN*. Prentice Hall, August 1995. 3rd edition 332p.
- [DFZ97] Y. Dinitz, M. Feiglstein, and S. Zaks. On optimal graphs embedded into paths and rings, with analysis using 11-spheres. In *Proc. 23rd Int. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG)*. Springer Verlag, 1997.
- [DP96] O. Delmas and S. Perennes. Circuit-Switched Gossiping in 3-Dimensional Torus Networks. In *Proc. Euro-Par'96 Parallel Processing / 2nd Int. EURO-PAR Conference*, volume 1123 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 370–373, Lyon, France, August 1996. Springer Verlag.
- [EFZ97] T. Eilam, M. Flammini, and S. Zaks. A complete characterization of the path layout construction problem for ATM networks with given hop count and load. In *24th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, volume 1256 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 527–537. Springer-Verlag, 1997.

- [FZ97] M. Feiglstein and S. Zaks. Duality in chain ATM virtual path layouts. In *4th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO)*, Monte Verita, Ascona, Switzerland, July 1997.
- [GCZ96] O. Gerstel, I. Cidon, and S. Zaks. The layout of virtual paths in ATM networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 4(6):873–884, 1996.
- [GWZ95] O. Gerstel, A. Wool, and S. Zaks. Optimal layouts on a chain ATM network. In *3rd Annual European Symposium on Algorithms*, volume LNCS 979, pages 508–522. Springer Verlag, 1995.
- [GZ94a] O. Gerstel and S. Zaks. A new characterization of tree medians with applications to distributed algorithms. *Networks*, 24,1:23–29, Jan. 1994.
- [GZ94b] Ornan Gerstel and Shmuel Zaks. The virtual path layout problem in fast networks. In *Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC '94)*, pages 235–243, New York, USA, August 1994. ACM Press.
- [HMR83] J.-W. Hong, K. Mehlhorn, and A.L. Rosenberg. Cost trade-offs in graph embedding with applications. *J. ACM*, 30, 1983.
- [HMS89] M.-C. Heydemann, J.-C. Meyer, and D. Sotteau. On forwarding indices of networks. *Discrete Appl. Math.*, 23:103–123, 1989.
- [KG98] Daniel Kofman and Maurice Gagnaire. *Réseaux Haut Débit, réseaux ATM, réseaux locaux et réseaux tout-optiques*. InterEditions-Masson, 1998. 2eme édition.
- [KKP97] E. Kranakis, D. Krizanc, and A. Pelc. Hop-congestion trade-offs for high-speed networks. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 8:117–126, 1997.
- [LR88] F. T. Leighton and S. Rao. An approximate max-flow min-cut theorem for uniform multicommodity flow problems with applications to approximation algorithms. In *29th Symp. on Foundations of Computer Science*, pages 422–431. IEEE, 1988.
- [MT96] Y. Manoussakis and Z. Tuza. The forwarding index of directed networks. *Discrete Appl. Math.*, 68:279–291, 1996.
- [Ros80] A. L. Rosenberg. Issues in the study of graph embeddings. In Hartmut Noltemeier, editor, *Proceedings of the International Workshop on Graphtheoretic Concepts in Computer Science*, volume 100 of LNCS, pages 150–176, Bad Honnef, FRG, June 1980. Springer.
- [Sol95] P. Solé. Expanding and forwarding. *Discrete Appl. Math.*, 58:67–78, 1995.
- [SV96] L. Stacho and I. Vrt'o. Virtual path layouts for some bounded degree networks. In *Structure, Information and Communication Complexity, 3rd Colloquium, SIROCCO*, pages 269–278. Carleton University Press, 1996.

- [Zak97] S. Zaks. Path layout in ATM networks - a survey. In *The DIMACS Workshop on Networks in Distributed Computing, DIMACS Center, Rutgers University*, Oct. 1997. manuscript.
- [Zel68] B. Zelinka. Medians and peripherians of trees. *Arch. Math.*, pages 87–95, 1968.

Deuxième partie

Rotations complètes dans les graphes de Cayley

Chapitre 6

Les graphes de Cayley

Les graphes de Cayley ont été intensément étudiés ces dernières années car ce sont de bons modèles pour les réseaux d'interconnexion de processeurs dans les machines parallèles à mémoire distribuée. Leur structure algébrique est à l'origine de leur large utilisation comme support de réseaux d'interconnexion. En effet, les routages présentant une grande symétrie quant au rôle des sommets y sont particulièrement faciles à décrire. Ces graphes très réguliers sont définis algébriquement à la section 6.2. Dans son cours à l'université de Montréal, Marie-Claude Heydemann décrit les propriétés et les paramètres des graphes de Cayley intéressants pour étudier les réseaux ([HD97]). L'article de Akers et Krishnamurthy [AK89] et celui de Lakshmivarahan, Jwo et Dhall [LJD93] proposent des synthèses sur le sujet.

En observant la symétrie du protocole d'échange total (en modèle F_\star) qu'ils viennent de construire dans le grille torique, Bermond, Kodate et Perennes ont l'idée en 1996 de définir la notion de rotation complète dans un graphe de Cayley ([BKP96]). Il s'agit d'un automorphisme du graphe, induit par un automorphisme du groupe, qui permet de construire un protocole de diffusion ayant les propriétés requises pour que, lorsqu'il est appliqué à tous les sommets en même temps, il induise un protocole d'échange total à la fois sans conflit et optimal.

Après des rappels de notions concernant les groupes et les graphes de Cayley, nous exposons dans la section 6.3 les résultats de Bermond, Kodate et Pérennes ainsi que les problèmes qu'ils ont soulevés. Nos résultats sont présentés dans le chapitre 7.

6.1 Des groupes

Les preuves des théorèmes énoncés ici se trouvent dans les livres de théorie des groupes. Le lecteur intéressé pourra par exemple consulter *An introduction to*

the *Theory of Groups* de Rotman [Rot95] ou le premier chapitre de l'*Algèbre* de Bourbaki.

6.1.1 Permutations

DÉFINITION. Si X est un ensemble non vide, une *permutation* de X est une bijection $\alpha : X \rightarrow X$. On note Σ_X l'ensemble des permutations de X .

Dans le cas particulier où $X = \{1, 2, \dots, n\}$, on note Σ_n au lieu de Σ_X et son cardinal vaut $|\Sigma_n| = n!$.

Une permutation peut être vue comme un réarrangement des éléments de X . Ainsi, une liste i_1, i_2, \dots, i_n sans répétition de tous les éléments de X décrit une permutation α . On note une permutation α sur $\{1, 2, \dots, n\}$ par la liste des images $(\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n))$. Par exemple, soient $\alpha = (3, 2, 1)$ et $\beta = (2, 3, 1)$ des permutations de $\{1, 2, 3\}$, le produit $\alpha\beta$ est $(2, 1, 3)$; on calcule ce produit en appliquant d'abord β puis α . Notons que $\beta\alpha = (1, 3, 2)$ et donc que $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

Cycles

DÉFINITIONS. Soient $x \in X$ et $\alpha \in \Sigma_X$, on dit que α *fixe* x si $\alpha(x) = x$.

L'ensemble $\{x \in X, \alpha(x) \neq x\}$ est appelé *support* de α et noté $Supp(\alpha)$.

Soient i_1, i_2, \dots, i_r des entiers distincts entre 1 et n . Si α fixe les $n - r$ autres entiers et que $\alpha(i_1) = i_2, \alpha(i_2) = i_3, \dots, \alpha(i_r) = i_1$ alors α est appelé un *r-cycle* ou encore un *cycle de longueur r*. On le note $\langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle$.

Tout 1-cycle est l'identité. Un 2-cycle, qui échange deux éléments entre eux, est appelé une *transposition*.

Un produit de cycles peut s'écrire de plusieurs façons. Dans l'exemple suivant, les cycles de droite sont disjoints : $\langle 1, 2 \rangle \langle 1, 3, 4, 2, 5 \rangle = \langle 1, 3, 4 \rangle \langle 2, 5 \rangle$.

DÉFINITION. Deux permutations sont *disjointes* si leurs supports sont disjoints.

Théorème 6.1 *Toute permutation est soit un cycle, soit un produit de cycles disjoints.*

Théorème 6.2 *Toute permutation est un produit de transpositions.*

6.1.2 Groupes

On suppose connu le langage des applications binaires, l'associativité, la commutativité. On définit comme suit les notions de groupe et d'homomorphisme de groupes.

DÉFINITIONS. Un *groupe* est un ensemble muni d'une loi de composition associative, possédant un élément neutre I et pour laquelle tout élément est inversible.

Un *homomorphisme de groupes* ϕ entre deux groupes $(G,*)$ et $(H,*)$ est une application de G vers H telle que $\phi(g * g') = \phi(g) * \phi(g')$ pour tous g et g' de G .

Si ϕ est bijective, on l'appelle un *isomorphisme* ; si $G = H$, un *endomorphisme* ; si les deux conditions sont vérifiées, c'est un *automorphisme*.

Théorème 6.3 Σ_X muni de la loi de composition est un groupe.

DÉFINITIONS. Σ_X est appelé le *groupe symétrique sur X* et le cas particulier Σ_n est le *groupe symétrique à n éléments*.

Un *groupe de permutations* est un sous-groupe du groupe Σ_n .

Générateurs

DÉFINITIONS. Soient G un groupe et S une partie de G . Le *sous-groupe engendré* par S est le plus petit groupe contenant S .

Si S engendre G , on dit que S est un *ensemble de générateurs* de G .

6.1.3 Actions de groupes

DÉFINITIONS. Soient G un groupe et E un ensemble. On appelle *action de groupe G sur E* une application $\Phi : G \times E \rightarrow E$ où $\Phi(g, x)$ est noté $g(x)$, satisfaisant, pour tous $g, g' \in G$ et $x \in E$, les conditions :

- $g(g'(x)) = gg'(x)$
- $I(x) = x$

On dit que G agit *transitivement* sur l'ensemble E si pour tout couple (x, x') d'éléments de E il existe g dans G tel que $g(x) = x'$. Si de plus g est unique on dit que G agit *régulièrement*.

6.1.4 Produit semi-direct

Nous définissons ici une loi binaire utilisée dans le chapitre suivant, page 158 pour définir le graphe de Knödel et page 162 pour définir le groupe des rotations-translations sur un graphe de Cayley.

DÉFINITION. Soit T un groupe et \mathcal{H} un groupe d'automorphisme de T ; on définit un produit dans $T \times \mathcal{H}$ par :

$$(t, h)(t', h') = (t * h(t'), hh').$$

Muni de ce produit, l'ensemble $T \times \mathcal{H}$ constitue le groupe noté $T \rtimes \mathcal{H}$.

EXEMPLE. Soit G un groupe et \mathcal{H} un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$. Si a est un élément de G , t_a la translation gauche de a est l'application $t_a : G \rightarrow G, g \mapsto ag$. Soit T le groupe des translations. \mathcal{H} agit sur T par $h(t_a) = t_{h(a)}$. On peut donc définir le produit semi-direct $T \rtimes \mathcal{H}$.

6.2 Graphes de Cayley

6.2.1 Définition

Soient G un groupe fini dont la loi de composition est notée multiplicativement et S un sous-ensemble de G ne contenant pas l'élément neutre. Alors le *graphe de Cayley orienté* $\text{Cay}(G, S)$, est défini par :

- l'ensemble des sommets est G ,
- l'ensemble des arcs est constitué des couples (g, gs) , pour $g \in G$ et $s \in S$.

Si de plus, pour tout élément s de S , son inverse s^{-1} est dans S alors le *graphe de Cayley non orienté* (aussi considéré comme orienté symétrique) $\text{Cay}(G, S)$, est défini par :

- l'ensemble des sommets est G ,
- l'ensemble des arêtes est constitué des paires $[g, gs]$, pour $g \in G$ et $s \in S$.

Nous ne considérons ici que les graphes de Cayley orientés symétriques.

Propriétés 6.1 *Un graphe de Cayley est un graphe simple (orienté, sans boucle et sans arête multiple), régulier de degré entrant et de degré sortant égal au nombre d'éléments de S .*

Si S (symétrique) engendre G alors le graphe (orienté symétrique) $\text{Cay}(G, S)$ est fortement connexe.

PREUVE. Si $gs = gs'$ alors $s = s'$ donc le degré sortant de g est $|S|$. De même pour le degré entrant.

Si S engendre G , alors tout g de G s'écrit comme un produit de S , ce qui décrit un chemin de I à g dans le graphe. Réciproquement, un chemin de I à g dans le graphe donne une suite de générateurs (étiquette des arcs traversés) dont le produit vaut g . \square

L'étude des graphes de Cayley peut être simplifiée en ne considérant que des groupes de permutations en vertu du théorème suivant :

Théorème 6.4 *Tout groupe fini est isomorphe à un groupe de permutations.*

Par exemple \mathbb{Z}_n , le groupe des entiers modulo n , est un groupe additif isomorphe au groupe des applications bijectives $\{x \rightarrow x + p \pmod{n}, 0 \leq p \leq n-1\}$. Ces applications sont des permutations de l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Tout graphe de Cayley peut donc être défini sur un groupe de permutations.

6.2.2 Exemples

Les graphes C_n , K_N et $H(n)$ sont des graphes de Cayley. Pour C_n , $G = \mathbb{Z}_n$ et $S = \{1, -1\}$; pour K_N , $G = S$ est un groupe quelconque d'ordre N ; pour $H(n)$, $G = (\mathbb{Z}_2)^n$ et $S = \{s_i = (0 \dots, 1, \dots, 0)\}$ où s_i est l'élément de $(\mathbb{Z}_2)^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i -ème (qui vaut 1).

Le star-graph

Le *star-graph de dimension n* , noté $S(n)$ et représenté sur la figure 6.1, est le graphe dont l'ensemble des sommets est Σ_n et dont les arcs sont les couples $(x_1 x_2 \dots x_n; x_i x_2 \dots x_{i-1} x_1 x_{i+1} \dots x_n)$. Le système de générateurs est donc formé des transpositions échangeant 1 et i : $S = \{\langle 1, i \rangle \mid 2 \leq i \leq n\}$. Le degré de $S(n)$ est $n-1$, son ordre $n!$ et son diamètre $\left\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \right\rfloor$ [AK89].

Proposition 6.5 *Si Γ et Γ' sont les graphes de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ et $\text{Cay}(G', S')$ alors $\Gamma \square \Gamma'$ est un graphe de Cayley sur le groupe $G \times G'$ engendré par $S' = \{(s, I') \mid s \in S\} \cup \{(I, s') \mid s' \in S'\}$ où I et I' sont respectivement les éléments neutres de G et G' .*

Ainsi par exemple, le tore (appelé aussi grille torique) $TM(n)^d$ est un graphe de Cayley sur $(\mathbb{Z}_n)^d$ où les générateurs sont les n -uplets dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une qui vaut 1 ou -1 .

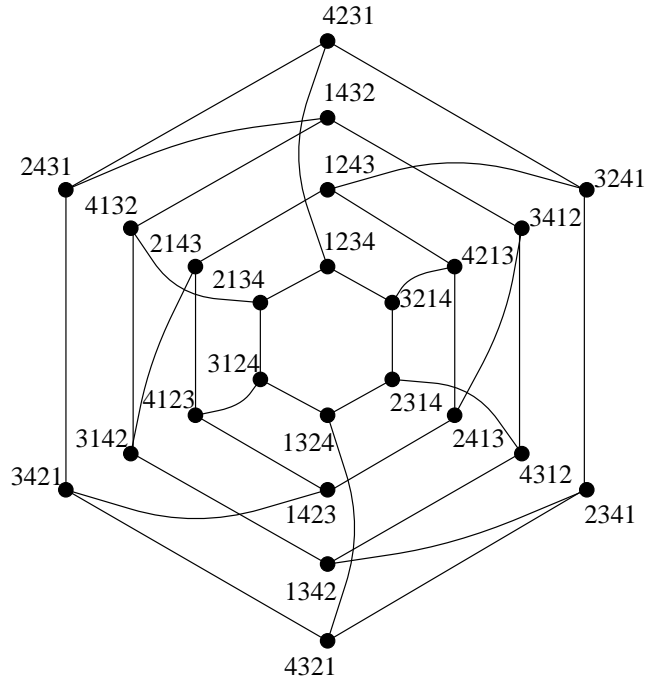


FIG. 6.1 – Le star-graph $S(4)$ sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$

6.2.3 Transitivité

DÉFINITIONS. Un *isomorphisme* ϕ entre deux graphes Γ et Γ' est une bijection entre $V(\Gamma)$ et $V(\Gamma')$ telle que $[x,y]$ est une arête de Γ si et seulement si $[\phi(x),\phi(y)]$ est une arête de Γ' . Si Γ et Γ' sont orientés la condition se traduit par : (x,y) est un arc de Γ si et seulement si $(\phi(x),\phi(y))$ est un arc de Γ' .

Un *automorphisme* ϕ d'un graphe Γ est un isomorphisme de Γ sur lui-même. On note $Aut(\Gamma)$ le groupe des automorphismes de Γ .

Un graphe Γ est dit *sommet-transitif* si, pour tout couple (x,y) de sommets de Γ , il existe un automorphisme de Γ qui envoie x sur y .

Un graphe Γ est dit *arc-transitif* si, pour tout couple $((u,v),(u',v'))$ d'arcs de Γ , il existe un automorphisme de Γ qui envoie u sur u' et v sur v' . En d'autres termes, Γ est *arc-transitif* si $Aut(\Gamma)$ agit transitivement sur $A(\Gamma)$.

Théorème 6.6 *Tout graphe de Cayley est sommet-transitif.*

Comme le confirme le graphe de Petersen (graphe de Moore pour $D = 2$ et $\Delta = 3$ dessiné sur la figure 6.2), les graphes sommet-transitifs ne sont pas tous des graphes de Cayley. Pour prouver que le graphe de Petersen n'est pas un graphe de Cayley, on peut faire une recherche exhaustive des graphes de Cayley d'ordre

10. Cependant, des démonstrations plus rapides utilisant la théorie des groupes existent.

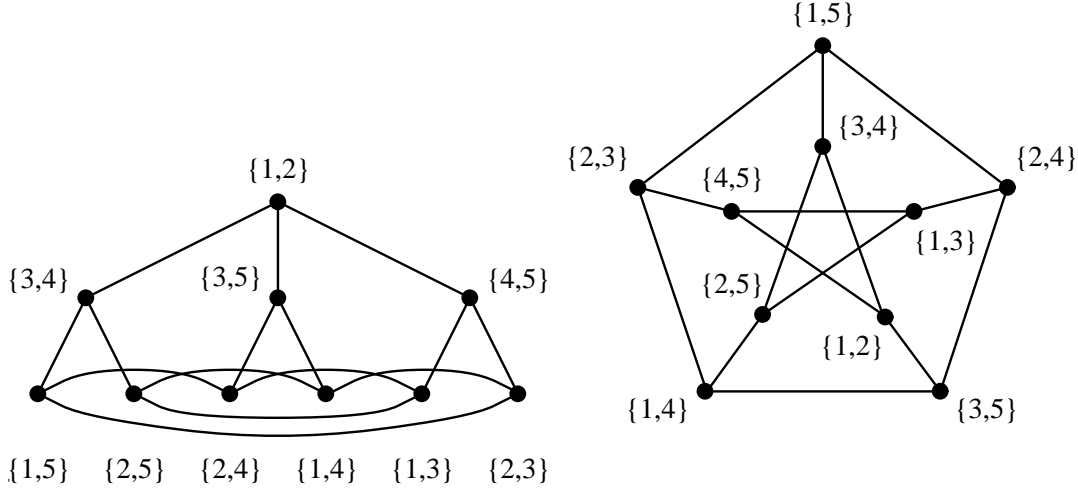


FIG. 6.2 – Le graphe de Petersen

6.3 Protocole d'échange total

Nous allons à présent énoncer le cadre dans lequel nous travaillons, poser le problème et rappeler les premiers résultats, obtenus principalement dans [BKP96].

Les communications que nous considérons sont synchrones, c'est-à-dire qu'elles se déroulent étape par étape. Dans le modèle store-and-forward défini page 22 qui modélise la plupart des communications dans les réseaux de processeurs, nous nous plaçons sous la contrainte F_* (full duplex, Δ -port) dans laquelle chaque sommet peut envoyer et recevoir une information de chacun de ses voisins à chaque étape de communication. De plus, nous considérons que sur chaque lien ne peut transiter qu'un paquet d'information à chaque étape.

Nous considérons un réseau représenté par un graphe de Cayley dans lequel chaque sommet possède au début un paquet d'information qu'il doit transmettre à tous les sommets. Nous cherchons à construire un protocole d'échange total optimal, c'est-à-dire qui se termine en un nombre minimum d'étapes de communication. L'idée de la construction est d'appliquer à tous les sommets du graphe un protocole de diffusion défini à partir du sommet I . La translation appliquée à la diffusion issue de I pour donner une diffusion issue de tout sommet v est définie algébriquement ci-après. Si le protocole de diffusion initial vérifie la propriété

décrite dans la proposition 6.8, alors le protocole d'échange total induit est sans conflit et optimal. Dans le but de construire un protocole de diffusion vérifiant la propriété demandée, Bermond, Kodate et Pérennes ont défini la notion de *rotation complète*. C'est un automorphisme du graphe, induit par un automorphisme du groupe, qui permute cycliquement les générateurs. Elle a été défini à l'origine par Bermond, Kodate et Pérennes comme suit :

DÉFINITION. Une *rotation complète* est un automorphisme ω du graphe $Cay(G, S)$, avec $|S| = \Delta$ tel qu'il existe une numérotation des générateurs dans \mathbb{Z}_Δ avec $\forall x \in G$ et $\forall i = 0 \dots \Delta - 1$, $\omega(xs_i) = \omega(x)s_{i+1}$ et $\omega(I) = I$.

Nous donnons une définition équivalente en terme d'automorphisme de groupe :

DÉFINITION. Une *rotation complète* de $Cay(G, S)$ est un automorphisme ω du groupe G qui permute cycliquement des éléments de S .

Nous définissons à présent la notion d'orbite :

DÉFINITIONS. L'*orbite* d'un sommet est définie comme l'ensemble de ses images par applications successives de la rotation, i.e. $\{\omega^i(x) \mid i = 0 \dots \Delta - 1\}$.

Un sommet $x \neq e$ est appelé un *point fixe* pour la rotation complète ω si $\exists i, 1 \leq i \leq \Delta - 1$, tel que $\omega^i(x) = x$. L'ensemble des points fixes est noté F_ω . On dit que l'*orbite* d'un tel point est *dégénérée*.

On note $\Gamma_{\Gamma \setminus F_\omega}^*(I)$ la composante connexe de $\Gamma \setminus F_\omega$ contenant I .

EXEMPLES. Dans le tore $TM(n)^k$, $\omega(g_{k-1}, \dots, g_0) = (g_{k-2}, \dots, g_0, -g_{k-1})$ est une rotation complète. Sur la représentation graphique usuelle du tore de dimension 2, cet automorphisme correspond à la rotation d'angle $-\Pi/2$: $\omega(1,0) = (0, -1)$, $\omega(0, -1) = (-1,0)$, $\omega(-1,0) = (0,1)$, $\omega(0,1) = (1,0)$. Sur la figure 6.3 on voit, dessinée en clair, l'image par la rotation de la portion du graphe dessinée en foncé. Sur la figure 6.4, on voit en noir des points d'orbite dégénérée : les points $(0,2)$ et $(2,0)$ forment une orbite à eux deux, tandis que le point $(2,2)$ est seul dans son orbite. Les orbites des autres points sont non dégénérée.

Dans le star-graph $S(k)$, $\omega(\langle 1, i \rangle) = \langle 1, i + 1 \rangle$ est une rotation complète.

Si le graphe considéré possède une rotation complète et que l'ensemble des sommets dont l'orbite sous cette rotation est dégénérée forme un stable alors on sait construire le protocole de diffusion cherché, puis un protocole d'échange total optimal.

Ainsi Bermond, Kodate et Pérennes sont parvenus à construire un protocole d'échange total optimal dans le tore, l'hypercube et le star-graph. En utilisant le même genre de construction, Fragopoulou, Akl et Meijer construisent dans

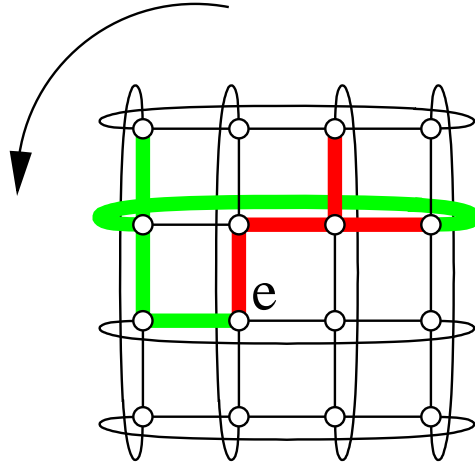


FIG. 6.3 – *Rotation dans le tore $TM(4)^2$*

[FAM96] un protocole d'échange total asymptotiquement optimal qui peut facilement être transformé en un protocole optimal.

On note $g_{F_*}(1, \Gamma)$ le temps minimal nécessaire pour effectuer l'échange total dans le graphe Γ dans le modèle F_* où une information peut circuler sur chaque lien à chaque étape.

6.3.1 Construction

Borne Inférieure

On voit que pour un graphe Γ à n sommets de degré minimum δ le temps d'échange total est au moins $\lceil \frac{n-1}{\delta} \rceil$. En effet, un sommet de degré minimum attend $n-1$ paquets d'information et ne peut en recevoir que δ à chaque étape.

Proposition 6.7 ([BKP96])

$$g_{F_*}(1, \Gamma) \geq \left\lceil \frac{n-1}{\delta} \right\rceil$$

La construction qui suit montre que cette borne est atteinte dans certains graphes.

Borne Supérieure

Dans un graphe de Cayley, étant donné un protocole de diffusion issu du sommet I (sommet correspondant à l'élément neutre du groupe G), on construit un

protocole de diffusion induit en tout sommet v par la translation qui consiste à multiplier à gauche par v . Ainsi, si à l'instant t l'information de I est transmise du sommet x au sommet xs (où s est un générateur) alors, dans la diffusion issue de v , à l'instant t , l'information de v est transmise du sommet vx au sommet vxs .

Proposition 6.8 ([BKP96]) *Si le protocole de diffusion issu de I utilise à chaque étape au plus un lien correspondant à chaque générateur alors les n diffusions induites sont sans conflit.*

Autrement dit, on peut appliquer en parallèle les n diffusions et obtenir un protocole d'échange total. En effet, si à l'instant t les informations de v et de u passent sur le lien (x, xs) cela signifie que dans la diffusion issue de I l'information transite par les liens $(u^{-1}x, u^{-1}xs)$ et $(v^{-1}x, v^{-1}xs)$ au même instant t . Or ces deux arcs correspondent au même générateur s donc $u = v$.

Pour construire une telle diffusion, on utilise la notion de *rotation complète*.

Pour que le protocole de diffusion soit optimal en respectant les conditions imposées, il faut qu'à chaque étape, Δ nouveaux sommets soient informés. Ceci est facile à réaliser pour les points d'orbite non dégénérée. Ainsi,

Lemme 6.9 *Il existe un protocole de diffusion issu de I dans $\Gamma_{\Gamma \backslash F_\omega}^*(I)$ qui, à chaque étape, utilise exactement un lien correspondant à chaque générateur et informe Δ nouveaux sommets.*

Ce protocole permet d'informer Δ sommets nouveaux à chaque étape, ce qui est optimal.

PREUVE. A l'instant 0, seul l'initiateur I détient l'information à diffuser. Lors de la première étape, I informe entièrement une orbite de points de $\Gamma \backslash F_\omega$ située à distance 1. A l'étape $t + 1$ un sommet x déjà informé informe un sommet y non encore informé suivant un arc s_i et par rotations successives $\omega^k(x)$ informe $\omega^k(y)$ suivant un arc s_{i+k} . Après chaque étape de communication, si un sommet est informé alors toute son orbite l'est. On informe ainsi Δ nouveaux sommets à chaque étape ; et les Δ arcs utilisés pour informer ces sommets sont étiquetés par Δ générateurs différents. \square

Sur la figure 6.4 l'initiateur I est en gris, les étapes successives sont représentées dans différentes teintes et les points d'orbite dégénérée sont en noir.

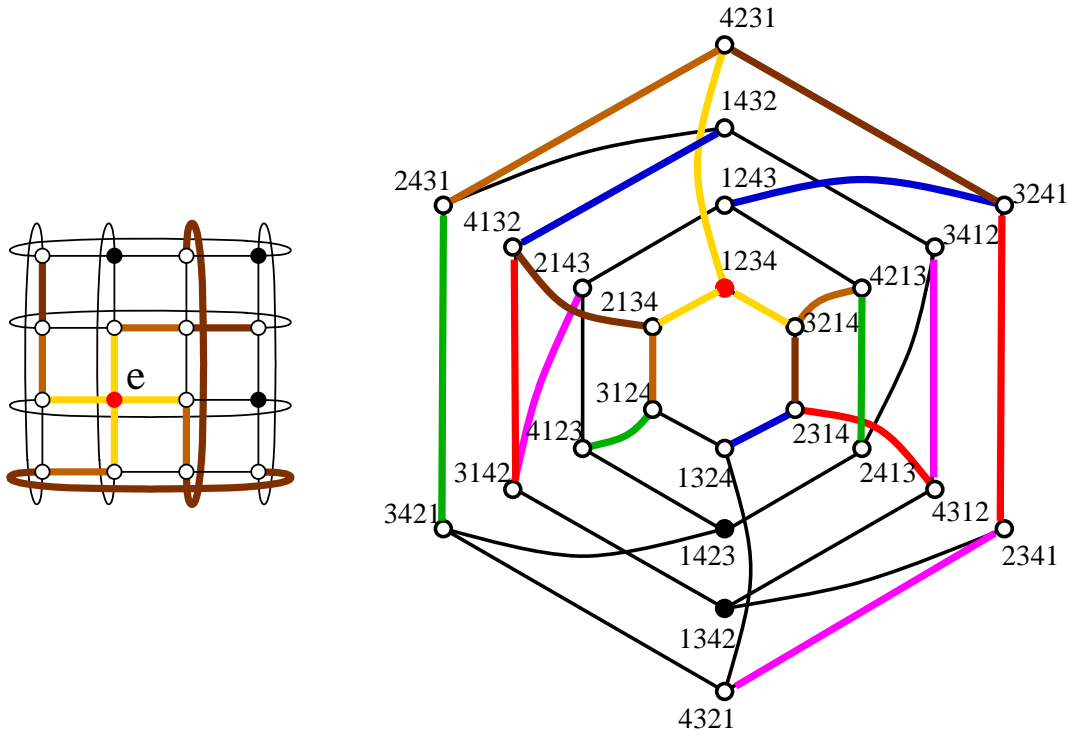


FIG. 6.4 – Construction de la diffusion par rotation dans le tore et le star-graph

Proposition 6.10 ([BKP96]) *Si $|F_\omega| = f$ et F_ω ne disconnecte pas le graphe alors il existe un protocole de diffusion vérifiant la propriété qui permet d'informer tous les sommets de $\Gamma \setminus F_\omega$ en $\frac{n-f-1}{\Delta}$ étapes.*

Il faut pouvoir prolonger la diffusion en informant les sommets dégénérés suivant des générateurs distincts pour obtenir le protocole d'échange total. Si F_ω est un stable alors il est facile de compléter le protocole en informant à chaque étape Δ nouveaux sommets de F_ω suivant des générateurs différents. On peut alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 6.11 ([BKP96]) *Si F_ω est un stable et ne disconnecte pas le graphe alors il existe un protocole d'échange total optimal :*

$$g_{F_*}(1, \Gamma) = \left\lceil \frac{n-1}{\Delta} \right\rceil$$

6.3.2 Exemples

Proposition 6.12 ([BKP96]) *Soit Γ un graphe de Cayley admettant une rotation complète ω . Si deux sommets à distance 2 ont au plus 2 voisins communs alors F_ω*

est un stable.

Dans le tore $TM(p)^k$, l'hypercube $H(k)$ et le star-graph $S(k)$, F_ω est donc un stable. De plus, dans $H(k)$ et $S(k)$, F_ω ne disconnecte pas le graphe. Les temps d'échange total optimaux pour l'hypercube et le star-graph sont donc :

$$g_{F_*}(1, H(k)) = \left\lceil \frac{2^k - 1}{k} \right\rceil$$

$$g_{F_*}(1, S(k)) = \left\lceil \frac{k! - 1}{k - 1} \right\rceil$$

On conjecture que F_ω ne disconnecte pas non plus $TM(p)^k$ et donc que

$$g_{F_*}(1, TM(p)^k) = \left\lceil \frac{p^k - 1}{2k} \right\rceil$$

6.3.3 Un autre type de rotation

Dans [FAM96], les auteurs étudient un concept similaire qui leur permet de construire un arbre couvrant utilisé ensuite pour concevoir des protocoles d'échange total ou de distribution dans l'hypercube généralisé, dans le modèle F_* , 1-port.

DÉFINITION. L'*hypercube généralisé* est un graphe de Cayley sur le groupe $(\mathbb{Z}_k)^n$ avec comme générateurs les $j \cdot a_i$ avec $j \in (\mathbb{Z}_k)^*$ et $a_i = (\delta_{ij})_{j=1..n}$; c'est-à-dire que deux sommets sont adjacents s'ils diffèrent en exactement une coordonnée. Soit $g_i^j = j\delta_{ij}$ l'élément de $(\mathbb{Z}_k)^n$ formé de 0 sauf en i -ème position où se trouve j .

$$G = (\mathbb{Z}_k)^n$$

$$S = \{g_i^j, i \in \mathbb{Z}_n, j \in (\mathbb{Z}_k)^*\}$$

Des protocoles de diffusion, d'échange total, de distribution et de multidistribution asymptotiquement optimaux sont construits en utilisant les propriétés algébriques du graphe. Pour ce faire, les auteurs définissent un automorphisme ω qui permute cycliquement les générateurs et transforme un arc associé à un générateur en un arc associé au générateur suivant. L'automorphisme de graphe que les auteurs proposent n'est pas un automorphisme du groupe et n'est donc pas une rotation complète mais les mêmes méthodes peuvent être appliquées et l'étude des points fixes permet de construire les protocoles optimaux cherchés.

L'automorphisme proposé est le suivant :

$$\omega(g_{n-1}, \dots, g_0) = (g_{n-2}, \dots, g_0, r(g_{n-1}))$$

où

$$\begin{aligned} r(j) &= 0 \text{ si } j = 0 \\ r(j) &= j \mod (k-1) + 1 \text{ sinon} \end{aligned}$$

6.4 Le problème

6.4.1 Quels graphes ?

« Quels graphes admettent une rotation complète ? »

Comme nous venons de le voir, si un graphe admet une rotation complète alors, sous certaines conditions sur l'orbite des sommets, on sait construire un protocole d'échange total optimal. Il est donc intéressant de caractériser les graphes de Cayley admettant une rotation complète.

6.4.2 Conditions pour l'existence d'une rotation complète

Dans le chapitre suivant on donne la définition des rotations et des rotations complètes ainsi que de leurs automorphismes de groupe associés, les S -stabilisateurs ; puis, dans la section 7.3, on donne des conditions pour qu'un graphe de Cayley admette une rotation complète ainsi que divers exemples et contre-exemples ; enfin, dans la section 7.4, on trouve une caractérisation des graphes de Cayley qui admettent une rotation complète, parmi ceux engendrés par des transpositions.

Bibliographie

- [AK89] Sheldon Akers and Balakrishnan Krishnamurthy. A group theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Trans. Comput.*, 38:555–566, 1989.
- [BKP96] Jean-Claude Bermond, Takako Kodate, and Stephane Perennes. Gossiping in Cayley graphs by packets. In *Proc. of the 8 th Franco-Japanese and 4 th Franco-Chinese Conf. on Combinatorial Computer Science*, volume 1120 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 301–305. Springer Verlag, 1996.
- [FAM96] Paraskevi Fragopoulou, Selim G. Akl, and Henk Meijer. Optimal communication primitives on the generalized hypercube network. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 32:173–187, 1996.
- [HD97] Marie-Claude Heydemann and Bertrand Ducourthial. *Cayley graphs and interconnection networks*, volume NATO ASI of C, pages 167–224. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [LJD93] S. Lakshmivarahan, J. Jwo, and S. K. Dhall. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: a survey. *Parallel Comput.*, 19:361–407, 1993.
- [Rot95] Joseph J. Rotman. *An introduction to the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 1995.

Chapitre 7

Cayley Graphs with Complete Rotations

Ce chapitre reprend le rapport de recherche écrit avec Marie-Claude Heydemann et Stéphane Pérennes. La première partie (propriétés des graphes de Cayley rotationnels) est soumise à *European Journal of Combinatorics*, la seconde partie (caractérisation des graphes de Cayley engendrés par des transpositions qui possèdent une rotation complète) sera présentée à *International Conference on Graph Theory (ICGT'2000)* et soumise à l'issue spéciale de *Discrete Mathematics*.

Une section d'introduction motive l'étude de l'existence d'une rotation complète par la construction d'un protocole optimal d'échange total.

La section 7.2 définit les notions et présente les premières propriétés. On y introduit les graphes de Cayley ; les rotations et leurs automorphismes de groupe associés, les S -stabilisateurs ; puis les rotations complètes et leurs automorphismes de groupe associés, les S -stabilisateurs cycliques. On montre en particulier qu'un automorphisme intérieur du groupe qui permute cycliquement les générateurs induit une rotation complète sur le graphe. Vient ensuite la définition des graphes rotationnels qui sont les graphes admettant une structure de Cayley sur laquelle on peut trouver une rotation complète. Des graphes admettant diverses structures de Cayley (comme le graphe complet que nous donnons en exemple) peuvent en effet n'admettre de rotation complète que pour certaines structures. On remarque à la fin de cette section qu'une rotation sur un graphe donné induit une rotation sur le graphe quotient si le sous-groupe normal par lequel on quotiente est stable par la rotation.

Dans la section 7.3, nous étudions plus précisément les propriétés structurelles des groupes sur lesquels sont construits les graphes de Cayley admettant une rotation. Le groupe est noté G , l'ensemble des générateurs S et le graphe de Cayley sur ce groupe avec cet ensemble de générateurs $Cay(G, S)$. En particulier, nous montrons que les générateurs doivent tous avoir le même ordre (mais que cette

condition n'est pas suffisante). Le cas des groupes abéliens est étudié plus spécialement. Nous présentons ensuite le groupe des rotations-translations, produit semi-direct du groupe des translations par le groupe des automorphismes de G laissant S stable, et son groupe d'automorphismes de graphe associé. Nous montrons en particulier qu'un graphe rotationnel est arc-transitif et que sa connexité est maximale. Nous terminons cette section par l'étude des rotations complètes dans les produits cartésiens montrant qu'un graphe rotationnel est une puissance d'un graphe premier (nous ne savons pas dire si ce graphe premier est lui-même de Cayley ou pas).

La dernière section (7.4) présente une caractérisation des graphes de Cayley construits sur des graphes engendrés par des transpositions qui admettent une rotation complète. Pour ce faire, on définit la notion de graphe de transposition qui permet de représenter l'ensemble des générateurs et on étudie le rapport entre la forme de ce graphe et l'existence d'une rotation complète. Après avoir défini le star graph généralisé, on énonce le théorème selon lequel les seuls graphes de ce type admettant une rotation complète sont les produits cartésiens de *modified bubble-sort graphs* isomorphes et les produits cartésiens de *generalized star graphs* $GTS(t + q, q)$ isomorphes, avec t et q premiers entre eux.

Nous rappelons en annexe les définitions de certains graphes de Cayley.

7.1 Introduction

Cayley graphs are good models for interconnection networks and have been intensively studied for this reason during the last few years. Articles [AK89], [LJD93] and [Hey97] give a survey.

Bermond, Kodate and Pérennes define in [BKP96] the concept of complete rotation in Cayley graphs in order to construct a gossip algorithm from a broadcast protocol applied to each vertex simultaneously. Given particular conditions on the orbits of the vertices under the complete rotation, they provide an optimal gossip algorithm. They build such an algorithm in the hypercube, the squared toroidal mesh and the star-graph (see the definitions in section 7.6).

Fragopoulou and Akl consider in [Fra95] and [FA97] a similar concept of rotation in Cayley graphs to construct a spanning subgraph used as a basic tool for the design of communication algorithms (gossiping, scattering). The class of graphs they consider contains most popular Cayley graphs for interconnection networks, such as cycles, hypercubes, generalized hypercubes, star graphs and the square n -dimensional torus.

Hence Cayley graphs admitting a complete rotation have specific symmetry properties which enable efficient and simple algorithmic schemes. In this paper,

we study this class of Cayley graphs and derive some of their properties. More precisely, we relate some symmetries of a graph with potential algebraic symmetries appearing in its definition as a Cayley graph on a group. In the case of Cayley graphs defined on a group generated by transpositions, we characterize the ones admitting a complete rotation.

This paper is organized as follows. In Section 7.2, after recalling some basic definitions and properties of Cayley graphs, we give the definitions and some properties of rotations and complete rotations. In Section 7.3, we study several conditions for the existence of a rotation. First, a characterization of graphs having a complete rotation is given in terms of representation and relators for the group and the set of generators (Section 7.3.1). Then, we introduce the rotation-translation group of a Cayley graph and consider some necessary conditions of the rotational property (Section 7.3.3). In Section 7.3.4, we consider complete rotations on Cartesian products of graphs. The last part, Section 7.4, is devoted to the Cayley graphs defined by transpositions. Generalized star graphs are introduced (Section 7.4.3) and the characterization of rotational Cayley graphs defined on a group generated by transpositions is given (Section 7.4.4). Finally, section 7.6 contains the definitions and drawings of some Cayley graphs and section 7.7 summarizes the notation.

7.2 Preliminaries

7.2.1 Cayley graphs

Section 7.7 summarizes the notation given below.

All groups considered are finite. By abuse of notation, we use the same letter to denote a group and the set of its elements and specify the operation of the group only when confusion can arise. We use multiplicative notation except in the case of Abelian groups. We denote by \mathbb{Z} the additive group of integers, and by \mathbb{Z}_n the group of integers modulo n . For G a group and $S \subset G$, the group generated by S is denoted by $\langle S \rangle$. The automorphism group of G (set of one-to-one mappings from G to G which preserve the composition law) is denoted by $Aut(G)$.

A permutation σ on the set $X = \{1, \dots, n\}$ is a one-to-one mapping from X to X . As usual, it is denoted by the images $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

For a permutation σ on X , $Supp \sigma$ is the set of elements i of X such that $\sigma(i) \neq i$.

A product of permutations $\sigma\tau$ means that we apply first mapping τ on the set $\{1, \dots, n\}$ and then mapping σ , i.e., $\sigma\tau = (\sigma(\tau(1)), \dots, \sigma(\tau(n)))$.

We denote by \mathfrak{S}_X the group of all permutations on X and, for short, by \mathfrak{S}_n if $X = \{1 \dots n\}$.

A cycle σ such that $\sigma(i_1) = i_2, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$ is denoted by $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$. In particular, $\langle i, j \rangle$ denotes the transposition of elements i and j .

We will consider mainly simple undirected graphs. A graph Γ is defined by its vertex set $V\Gamma$ and its edge set $E\Gamma$. The edge between two vertices u and v is denoted by $[u, v]$ or simply by uv if no confusion is possible. If necessary, we consider the symmetric digraph Γ^* associated to a graph Γ and obtained by replacing any edge uv by two opposite arcs (u, v) and (v, u) . We denote by $A\Gamma$ the set of arcs of Γ^* .

We denote by $Aut(\Gamma)$ the automorphism group of a graph Γ .

A graph Γ is said to be *arc-transitive* (*symmetric* in [Big74]) if for any given pair of directed edges $(u, v), (u', v')$ there exists an automorphism $f \in Aut(\Gamma)$ such that $f(u) = u'$ and $f(v) = v'$. In other words Γ is said to be arc-transitive if $Aut(\Gamma)$ acts transitively on $A\Gamma$.

Definition 7.1 (see for example [Big74]) Let G be a group with unit I and S a subset of G such that $I \notin S$ and the inverse of elements of S belong to S . The *Cayley graph* $Cay(G, S)$ is the graph with vertex set G and with edge set $\{[g, gs] : g \in G, s \in S\}$.

We will say that the edge $[g, gs]$, $s \in S$, is labeled by s . Notice that the edge $[g, gs]$ can also be labeled by s^{-1} since it is equal to the edge $[gs, gss^{-1}]$.

Examples of well-known Cayley graphs are given in Section 7.4.1 and section 7.6. We recall some well known results on Cayley graphs we will use later.

If G is generated by S , i.e. $G = \langle S \rangle$, then $Cay(G, S)$ is connected.

By analogy with geometry, for $a \in G$, the mapping $t_a : G \rightarrow G$, defined by $t_a(x) = ax$, is called a *translation* of $Cay(G, S)$. The mappings $t_a, a \in G$, form a subgroup T of $Aut(Cay(G, S))$ which is isomorphic to the group G and acts regularly on G . The following characterization of Cayley graphs is well-known.

Theorem 7.1 [Sab58] *Let Γ be a connected graph. The automorphism group $Aut(\Gamma)$ has a subgroup G which acts regularly on $V\Gamma$ if and only if Γ is a Cayley graph $Cay(G, S)$, for some set S generating G .*

7.2.2 S-stabilizers and rotations

Let G be a group. Note that any internal mapping of G can be considered as an action on the vertices of the graph $Cay(G, S)$. So some symmetries of the group

G give naturally rise to symmetries in the graph $Cay(G, S)$. For commodity, we introduce:

Definition 7.2 Let G be a finite group and S a set of generators of G . A homomorphism ω of the group G is called a S -stabilizer if $\omega(S) = S$.

Notice that since G is finite, a S -stabilizer is bijective and therefore a group automorphism. We denote by $Stab(G, S)$ the set of S -stabilizers of G which is a subgroup of $Aut(G)$. A S -stabilizer different from the identity is said to be *non-trivial*.

In the following, we will study graph automorphisms of $Cay(G, S)$ which are induced by S -stabilizers of G using the following proposition, a proof of which can be found in [Big74], Proposition 16.2.

Proposition 7.3 [Wat71] *If ω is an automorphism of the group G generated by S such that $\omega(S) = S$, then ω is a graph automorphism of $Cay(G, S)$ which fixes the vertex I .*

By proposition 7.3, a S -stabilizer induces a graph automorphism of $Cay(G, S)$ we simply call a *rotation*.

When applying Proposition 7.3, we will use the same letter to denote the group automorphism and the graph automorphism it induces.

If H is a subgroup of $Stab(G, S)$, we will denote by \underline{H} its corresponding isomorphic subgroup of $Aut(Cay(G, S))$, or simply by H when no confusion will arise.

7.2.3 Definitions of complete rotations

The notion of rotation in graph theory was first used in the context of embeddings (see for example [BW79], [Whi84]). In this context, a *rotation* of a graph Γ at a vertex i is a cyclic ordering of the neighbors of i , and a *rotation scheme* is a collection $\{r_i, i \in V\Gamma\}$, where r_i is a rotation at the vertex i . It is used to embed the graph Γ into a surface. For a Cayley graph, any cyclic permutation r of the generators allows us to define a rotation scheme by $r_i(j) = ir(i^{-1}j)$ for any edge ij (see [BW79], page 117).

The notion of complete rotation in Cayley graphs we will use is related, but different. The original definition of complete rotation is given in [BKP96] as follows:

Definition 7.4 [BKP96] Let $Cay(G, S)$ be a Cayley graph with $G = \langle S \rangle$. A mapping $\omega : G \rightarrow G$ is a complete rotation of $Cay(G, S)$ if it is bijective and satisfies

the following two properties for some ordering of $S = \{s_i, 0 \leq i \leq d-1\}$:

$$\omega(I) = I \quad (7.1)$$

$$\omega(xs_i) = \omega(x)s_{i+1} \quad (7.2)$$

for any $x \in G$ and any $i \in \mathbb{Z}_d$.

It is a particular case of the concept of rotation. As we will see below, a complete rotation of $\text{Cay}(G, S)$ is a rotation of $\text{Cay}(G, S)$ such that the permutation induced on S is a cycle of length $|S|$. More precisely, let us first consider the S -stabilizers of G which cyclically permutes the generators in S .

Definition 7.5 A S -stabilizer of G , $\omega : G \rightarrow G$, is said to be *cyclic* if, for some ordering of $S = \{s_i, 0 \leq i \leq d-1\}$, $\omega(s_i) = s_{i+1}$, for any $i \in \mathbb{Z}_d$.

Then, we get:

Property 7.6 A mapping $\omega : G \rightarrow G$ is a complete rotation of $\text{Cay}(G, S)$ if and only if it is the graph automorphism induced by a cyclic S -stabilizer of G .

Proof. Clearly, any cyclic S -stabilizer of G induces a complete rotation of $\text{Cay}(G, S)$ as defined in Definition 7.4. The converse is a corollary of the following proposition 7.7 listing some properties of complete rotations (some of them are used in [FA97] and [BKP96]). \square

Proposition 7.7 Let ω be a complete rotation of the Cayley graph $\text{Cay}(G, S)$, with $G = \langle S \rangle$ and S ordered ($S = \{s_i, 0 \leq i \leq d-1\}$). Then, the following properties are satisfied.

- (i) For any $i \in \mathbb{Z}_d$, $\omega(s_i) = s_{i+1}$;
- (ii) For any $i, j \in \mathbb{Z}_d$ and any $x \in G$, $\omega^{j-i}(xs_i) = \omega^{j-i}(x)s_j$;
- (iii) ω is a group automorphism of order d ;
- (iv) ω is a graph automorphism; and
- (v) ω^p is a group automorphism for any $p \in \mathbb{Z}$ and a complete rotation for p prime with d . In particular, ω^{-1} is a complete rotation.

Proof. (i) By taking $x = I$ in Equation (7.2) of Definition 7.4.

(ii) By induction on $j - i$ using Equation (7.2).

(iii) By induction on the number of factors of an element written as a product of generators, we get from definition 7.4, for any $x, y \in G$,

$$\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$$

Thus the bijective mapping ω is a group automorphism. Furthermore, for any generator s_i , by (ii), $\omega^d(s_i) = s_i$ and $\omega^j(s_i) \neq s_i$ for $0 \leq j < d$, so that $\omega^d = Id$ and $\omega^k \neq I$ for $1 \leq k < d$.

(iv) By Proposition 7.3 and (iii), ω is a graph automorphism.

(v) By induction on p , for any $x, y \in G$, $\omega^p(xy) = \omega^p(x)\omega^p(y)$. If p and d are co-prime then $p\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}_d$ and the sequence $s_0, s_p, s_{2p}, \dots, s_{(d-1)p}$ defines a new ordering of the generators so that ω^p is a complete rotation. \square

The simplest automorphisms of a group G are inner automorphisms: $x \rightarrow \sigma x \sigma^{-1}$, where $\sigma \in G$. Therefore it is natural to consider the following property which defines the notion of rotation considered in [FA97]:

Property 7.8 Let $Cay(G, S)$ be a Cayley graph where $G = \langle S \rangle$. If there exist an element $\sigma \in G$ and an ordering of $S = \{s_i, 0 \leq i \leq d-1\}$ such that for any $i \in \mathbb{Z}_d$,

$$s_{i+1} = \sigma s_i \sigma^{-1}, \quad (7.3)$$

then the mapping $\omega : G \rightarrow G$, such that $\omega(x) = \sigma x \sigma^{-1}$, is a complete rotation of $Cay(G, S)$.

Proof. An inner automorphism of G defined by $\omega(x) = \sigma x \sigma^{-1}$ and satisfying Equation 7.3 is a cyclic S -stabilizer. By Property 7.6, it induces a complete rotation of $Cay(G, S)$. \square

In [FA97], the authors give the generators s_i , $0 \leq i \leq d-1$, and a permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ for cycles, hypercubes, squared torus, star graphs, modified bubble-sort graphs, bisectional networks, and two generalizations of hypercubes, showing by Property 7.8 that all these graphs have a complete rotation (see section 7.6). Thus most of the popular Cayley graphs for interconnection networks have a complete rotation.

Property 7.8 suggests the following problem.

Problem 7.9 For which Cayley graphs $Cay(G, S)$ is the existence of a complete rotation equivalent to the existence of an inner automorphism of G which cyclically permutes the generators in S ?

We give a partial answer to this problem in Proposition 7.49.

Notice that it is a classical result of group theory that if $G = \mathfrak{S}_n$ with $n \neq 2, 6$, then the only group automorphisms of G are the inner automorphisms. But this result is not sufficient since, for example, the hypercube $H(d)$ is a Cayley graph on a proper subgroup of \mathfrak{S}_d (see section 7.6).

7.2.4 Rotational graphs

We say for short that a graph Γ is *rotational* if there exist a group G and a set of generators S such that $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ and G has a cyclic S -stabilizer.

Remark 7.10 The existence of a complete rotation in a given Cayley graph depends on the choice of the group and the set of generators as the following proposition and theorem show.

Proposition 7.11 *The additive group \mathbb{Z}_n has a cyclic $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ -stabilizer if and only if n is prime.*

Proof. The additive group \mathbb{Z}_n is generated by $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$. For $x \in \mathbb{Z}$, any group homomorphism ω satisfies $\omega(x) = \omega(1 + 1 + \dots + 1) = x\omega(1)$. Thus, if $\omega(1) = a$, then $\omega(x) = ax$. If ω is a complete rotation, then the generators are $1, a, a^2, \dots, a^{n-2}$ and thus $\mathbb{Z}_n^* = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-2}\}$ is cyclic. Thus, n is prime. Conversely, if n is prime, there is an integer a such that $\mathbb{Z}_n^* = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-2}\}$ and then $\omega(x) = ax$ is a complete rotation. \square

Thus $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n^*)$ has a complete rotation if and only if n is prime. On the other hand, we have the following result.

Theorem 7.2 *The complete graph K_n is rotational if and only if n is a power of a prime number.*

Proof. [Mar96] First note that $K_n = \text{Cay}(G, S)$ if and only if the order of G is n and $S = G \setminus I$. It means that every element of G except the identity is a generator.

If n is not a prime power, then there exist two different prime numbers p and q which divide n . Then the group G has at least an element of order p and an element of order q with $p \neq q$. By Corollary 7.20, K_n is not rotational.

If n is a prime power, then there exists a field F with n elements (see for example [AB93], page 445) and $F \setminus \{0\}$ is a cyclic multiplicative group. For any

generator r of $F \setminus \{0\}$, the mapping ω , defined by $\omega(x) = rx$, is a complete rotation of $K_n = \text{Cay}(F, F \setminus \{0\})$ (F is considered as an additive group). \square

Notice that a similar result has already been proved in the context of maps, in a different way ([BW79], page 128).

Theorem 7.3 [BW79] *There is a rotation on K_n which gives rise to a symmetrical map if and only if n is a prime power.*

The next proposition shows that one can construct new rotational Cayley graphs by taking a quotient according to a normal subgroup which is invariant by the rotation.

Proposition 7.12 *If $\text{Cay}(G, S)$ has a complete rotation which is a K -stabilizer for a normal subgroup K of G , then the quotient Cayley graph $\text{Cay}(G/K, S')$ is also rotational, where S' is the image of S by the canonical epimorphism from G onto G/K .*

Proof. Let ω be a complete rotation of $\text{Cay}(G, S)$ such that $\omega(K) = K$. Since K is stabilized by ω , we can define the automorphism of G/K induced by ω denoted by ω' . Let S' be the set of the images of S in G/K by the canonical epimorphism. Then ω' is a group-automorphism of G/K which is also a graph-automorphism of $\text{Cay}(G/K, S')$. Furthermore, ω' induces a cyclic permutation of the generators. Thus ω' is a complete rotation of $\text{Cay}(G/K, S')$. \square

Example 7.13 Let K be a cyclic binary code (that is a subgroup of \mathbb{Z}_2^n invariant by cyclic shift of the coordinates). Then the graph (also called quotient) obtained from the hypercube $H(n)$ by identifying all the vertices $\{x + k : k \in K\}$ to one vertex, for every $x \in \mathbb{Z}_2^n$, is a rotational Cayley graph.

Proof. The hypercube $H(n)$, considered as a Cayley graph on the additive group \mathbb{Z}_2^n , admits the cyclic shift of the coordinates as a complete rotation (see section 7.6.3 and Example 7.21). By definition a binary cyclic code K is a subgroup of \mathbb{Z}_2^n invariant by the cyclic shift and K is a normal subgroup since \mathbb{Z}_2^n is Abelian. By Proposition 7.12, $\text{Cay}(\mathbb{Z}_2^n/K, S')$ is a rotational Cayley graph. \square

In the following sections, we will give other examples of rotational graphs belonging to particular classes of Cayley graphs, the ones defined on Abelian groups and on permutation groups generated by transpositions. To finish this section, we present an example which does not belong to these classes.

Example 7.14 *Knödel graph.*

The Knödel graphs are defined in [FP94] and are based on the Knödel construction of an optimal gossiping algorithm [Knö75]. They can also be defined as Cayley graphs on the semi-direct product $G = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_2$ for the multiplicative law:

$$(x,y)(x',y') = (x + (-1)^y x', y + y'), \quad x, x' \in \mathbb{Z}_p, \quad y, y' \in \mathbb{Z}_2.$$

and

$$S = \{(2^i, 1), 0 \leq i \leq n-1\}.$$

We consider here the particular case $p = 2^n - 1$ and $S = \{s_i, 0 \leq i \leq n-1\}$, with $s_i = (2^i, 1)$. Let us consider the mapping ω defined by $\omega[(x,y)] = (2x,y)$. Since $(x,y)s_i = (x + (-1)^y 2^i, y + 1)$, for $0 \leq i \leq n-1$, we get:

$$\omega(0,0) = (0,0)$$

$$\omega[(x,y)s_i] = \omega[(x,y)]s_{i+1}.$$

By Definition 7.4, ω is a complete rotation of $\text{Cay}(\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_2, S)$.

7.3 Study of conditions for the existence of a rotation

7.3.1 A characterization of rotations

An attractive way to define a group generated by a set S is to consider the elements of the group as words on the alphabet S modulo some well chosen set of equalities satisfied by the set S . For example, the additive group $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ is generated by $(1,0)$ and $(0,1)$. Notice that

$(1,0) + (0,1) = (0,1) + (1,0)$, and $n(0,1) = n(1,0) = (0,0)$. This group can also be defined as a multiplicative group generated by $S = \{s_1, s_2\}$ satisfying the equalities (called relations in group theory): $s_1^n = I$, $s_2^n = I$ and $s_1 s_2 = s_2 s_1$ or $s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} = I$. Equivalently, in order to define the group, one can use a set of relators $R = \{s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1}, s_1^n, s_2^n\}$. In the above example the mapping $(x,y) \rightarrow (y,x)$ belongs to $\text{Stab}(G,S)$ and this fact clearly appears in the set of relations which is symmetric in s_1 and s_2 .

More precisely any group G generated by a set S can be seen as the quotient of the free group generated by S by a set of relations between the generators (see for example [CM72], [Joh76] or [Rob96]) for the definitions on presentations of groups). As in [Joh76], we denote by $F(S)$ the free group generated by S and by R the subset of $F(S)$ of the elements which are called *relators* (thus consisting of words on the elements of S). Let $N(R)$ be the normal closure of R in $F(S)$, that is the smallest normal subgroup of $F(S)$ containing R . It is also the subgroup of $F(S)$ generated by the elements grg^{-1} , $g \in F(S), r \in R$ (see for example [Rob96],

page 16). Then G is the quotient group $F(S)/N(R)$. We denote by α the canonical epimorphism from $F(S)$ onto G and by e the empty word of $F(S)$. Thus $\alpha(e) = I$ and, for any $x \in F(S)$, $\alpha(x) = I$ if and only if $x \in N(R)$. As usual, we do not distinguish s from $\alpha(s)$ for $s \in S$.

Recall also that any free group automorphism of $F(S)$ can be defined by the images of the elements of S .

Definition 7.15 For any S -stabilizer f of a group G with presentation $G = (S|R)$, we denote by \tilde{f} the automorphism of $F(S)$ defined by $\tilde{f}(s) = f(s)$, for any $s \in S$.

The following proposition shows the relation between a non-trivial group $Stab(G, S)$ and a presentation of G with a set of relators admitting symmetries.

Proposition 7.16 *Let G be a group generated by a subset S . Then the following properties are equivalent:*

- (i) *the group G admits a non trivial S -stabilizer, i.e. the subgroup $Stab(G, S)$ is non trivial;*
- (ii) *for any subset R of $F(S)$ such that $G = (S|R)$ is a presentation of G , the free group $F(S)$ has a non trivial $N(R)$ -stabilizer, where $N(R)$ is the normal closure of R , which is also a S -stabilizer; and*
- (iii) *there exists a presentation of G , $G = (S|R)$, such that $F(S)$ has a non trivial R -stabilizer which is also a S -stabilizer.*

Remark 7.17 In other words the existence of a S -stabilizer is equivalent to the existence of a permutation on the set of generators S letting the set of relators R invariant.

Proof. (i) \Rightarrow (ii) Assume f is an S -stabilizer of the group G generated by S . Then for any presentation $G = (S|R)$, let us define a group automorphism \tilde{f} of $F(S)$, as explained above, by $\tilde{f}(s) = f(s)$, for any $s \in S$. This implies $\alpha\tilde{f} = f\alpha$. Furthermore, if $x \in N(R)$, then $\alpha(x) = I$ and $f(\alpha(x)) = I = \alpha(\tilde{f}(x))$, and thus $\tilde{f}(x) \in N(R)$. This proves that \tilde{f} is a $N(R)$ -stabilizer. It is also a non-trivial S -stabilizer.

(ii) \Rightarrow (iii) Evident by taking the canonical presentation $G = (S|N(R))$.

(iii) \Rightarrow (i) Let $G = (S|R)$ be a presentation of G and \tilde{f} a R -stabilizer. Since every element x of $N(R)$ is a product of elements of the form grg^{-1} with $r \in R$, $g \in F(S)$ and \tilde{f} is a R -stabilizer, using $\tilde{f}(grg^{-1}) = \tilde{f}(g)\tilde{f}(r)\tilde{f}(g)^{-1} = g'r'g'^{-1}$ with $r' \in R$, $g' \in F(S)$, we get that \tilde{f} is also a $N(R)$ -stabilizer. Therefore it is possible to define a group automorphism f of the quotient $F(S)/N(R)$ such that $\alpha\tilde{f} = f\alpha$.

Furthermore S is invariant by f . □

Corollary 7.18 *Let G be a group generated by a subset S . Then the following properties are equivalent:*

- (i) *the Cayley graph $\text{Cay}(G, S)$ has a complete rotation;*
- (ii) *for any presentation $G = (S|R)$, the free group $F(S)$ has a $N(R)$ -stabilizer, where $N(R)$ is the normal closure of R , which induces a cyclic permutation of S ; and*
- (iii) *there exists a presentation of G , $G = (S|R)$, such that $F(S)$ has a R -stabilizer which induces a cyclic permutation of S .*

Proof. The proof is similar to the proof of Proposition 7.16 using the definition of a complete rotation and the fact that the action of f on S is the same as the action of \tilde{f} . □

Remark 7.19 Once again the existence of a complete rotation of $\text{Cay}(G, S)$ is equivalent to the existence of a presentation of $G = (S|R)$ such that the set of relators R is invariant by a cyclic permutation of the generators.

Corollary 7.20 *If $\text{Cay}(G, S)$ has a complete rotation, then all the generators in S have the same order.*

Proof.

This result is a consequence of Corollary 7.18 since, if the generator s_i is of order p , the relation $(s_i)^p = I$ has to be fixed by a cyclic permutation on the generators. □

The following table gives presentations $(S|R)$ for some well known Cayley graphs $\text{Cay}(G, S)$ with $G = (S|R)$. These presentations are already known (see for example [CM72] and [Del97]). By applying Corollary 7.18, this proves that the considered graphs are rotational (see [FA97] and section 7.6 for another proof using Property 7.8).

Example 7.21

Graph	S
Hypercube $H(n)$	$\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$
Squared toroidal mesh TM_p^d	$\{s_1, s_2, \dots, s_d$ $s_1^{-1}, s_2^{-1}, \dots, s_d^{-1}\}$
Modified bubble-sort graph $MBS(n)$	$\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$
Star graph $ST(n)$	$\{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$

Graph	R
Hypercube $H(n)$	$\{s_i^2, s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}\}$
Squared toroidal mesh TM_p^d	$\{s_i^p, s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}\}$
Modified bubble-sort graph $MBS(n)$	$\{s_i^2, (s_i \cdot s_{i+1})^3, s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1} \ (j \neq i+1, j \neq i-1)$ $s_n s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1\}$
Star graph $ST(n)$	$\{s_i^2, (s_i s_j)^3, (s_i s_j s_k s_j)^2\}$

Let us notice that despite we only work here on graphs the same notion of complete rotation can be considered for digraphs. In that case, the generating set S do not need to be symmetric ($S = S^{-1}$). With this definition similar result can be derived. In particular Corollary 7.18 can be applied to digraphs. For example, the digraphs defined as *arrowheads* in [Dés97] have a complete rotation since they can be defined as the Cayley digraphs on the groups $G_n = (S|R_n)$ with $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ and $R_n = \{s_1 s_2 s_3, s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1}, s_2 s_3 s_2^{-1} s_3^{-1}, s_3 s_1 s_3^{-1} s_1^{-1}, s_1^{2^n}, s_2^{2^n}, s_3^{2^n}\}$ for any $n \geq 0$.

In Proposition 7.16 and Corollary 7.18 a symmetric presentation of G is provided when the associated Cayley graph admits a rotation. One can think about asking the following question: if $Cay(G, S)$ is rotational, is it possible to find a symmetric presentation which is also minimal with respect to the inclusion? For example, in the case of arrowheads the presentation of G_n given in [Dés97] is minimal but not symmetric: $(S|R'_n)$, with $R'_n = \{s_1 s_2 s_3, s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1}, s_1^{2^n}, s_2^{2^n}, s_3^{2^n}\}$.

7.3.2 Abelian groups

One can give more details in the case of Cayley graphs on Abelian groups.

Let us recall that a *circulant graph* (also called multi-loop graph) is a Cayley graph $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ on the additive group \mathbb{Z}_n with symmetric generating set $S = \{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_k\}$, for some integers n, s_1, s_2, \dots, s_k . These graphs have been intensively studied as models of interconnection networks (see the survey given in [BCH95]).

Lemma 7.22 *A circulant graph $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ has a complete rotation if and only if there exists integers a and p prime with n such that $S = \{ap^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$.*

Proof. The if part is evident by taking $\omega(x) = px$.

The only if part follows from the fact that every automorphism of the additive group \mathbb{Z}_n is of the kind $x \rightarrow px$ for some integer p (see the proof of Proposition 7.11). \square

Lemma 7.23 *Let $\omega : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ be defined by $\omega(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, x_1)$. A Cayley graph on a (finite) Abelian group G has a complete rotation if there exists an integer n and a subgroup Q of \mathbb{Z}^n such that $\omega(Q) = Q$ and G is isomorphic to the quotient \mathbb{Z}^n/Q .*

Proof. By Corollary 7.18, we get the result. \square

Example 7.13 is also an illustration of this lemma.

7.3.3 Rotation-translation group

We will consider some properties of Cayley graphs and compare them to the rotational property.

Proposition 7.24 *Given $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$, let H be a subgroup of $\text{Stab}(G, S)$ and \underline{H} be the induced subgroup of $\text{Aut}(\Gamma)$. Let T be the subgroup of translations of Γ . Then the subgroup of $\text{Aut}(\Gamma)$ generated by T and \underline{H} , $\langle \underline{H}, T \rangle$, is a semi-direct product $T \rtimes H$ and therefore has cardinal $|G||H|$. Moreover, the set $A_h = \{th \mid t \in T\}$ for $h \in \underline{H}$, acts regularly on the vertices of Γ and maps any arc labeled s on any arc labeled $h(s)$.*

Proof. Let us recall conditions which are sufficient to have a (inner) semi-direct product $H \rtimes T = T \rtimes H$ ([Rob96], page 27):

- (i) T is a normal subgroup of $\langle \underline{H}, T \rangle$,
- (ii) $\langle \underline{H}, T \rangle = T\underline{H}$,
- (iii) $T \cap \underline{H} = I$.

We prove that all these conditions are fulfilled.

(i) Let h be a S -stabilizer and t_a a translation. For any $x \in G$, we get $ht_a(x) = h(ax) = h(a)h(x) = t_{h(a)}h(x) = t_{h(a)}h(x)$. Thus $ht_a = t_{h(a)}h$ and T is a normal subgroup of $\langle \underline{H}, T \rangle$.

(ii) Every element of $\langle \underline{H}, T \rangle$ is a product of elements of \underline{H} and T and using equality of (i) can be written as a product of $T\underline{H}$ or $\underline{H}T$.

(iii) If $t_a \in T$ belongs to \underline{H} , then $t_a(I) = aI = I$, thus $a = I$ and $t_a = I$.

We now prove that, for any given $h \in \underline{H}$, $A_h = \{th \mid t \in T\}$ acts regularly on the vertices. Let x and x' be two given vertices of Γ . $x' = t_a h(x)$ implies $a = x' h(x)^{-1}$ and $x' = t_{x' h(x)^{-1}}(x)$. Thus there exists a unique automorphism $t_a h \in A_h$ such that $x' = t_a h(x)$. Furthermore, if $y = xs$, then $t_a h(y) = t_a(h(x)h(s)) = ah(x)h(s) = t_a(h(x))h(s) = t_a h(x)h(s)$.

Thus, if (x, y) is an arc labeled s , then $(t_a h(x), t_a h(y))$ is an arc labeled $h(s)$. This achieves the proof. \square

By taking $H = \text{Stab}(G, S)$ in Proposition 7.24, we can introduce the following definition :

Definition 7.25 Let $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$. The subgroup of automorphisms of Γ defined by the (inner) semi-direct product $T \rtimes \underline{\text{Stab}(G, S)}$ is called the *rotation-translation group* of Γ .

In the case of complete rotation we obtain the following result.

Corollary 7.26 *For any rotational Cayley graph Γ , there exists a subgroup of $\text{Aut}(\Gamma)$ which acts regularly on $A\Gamma$ and is isomorphic to the semi-direct product $T \rtimes \mathbb{Z}_d$, where d is the degree and T is the translation group of Γ .*

Proof. Let ω be a complete rotation of $\text{Cay}(G, S)$. We apply Proposition 7.24 when \underline{H} is the cyclic group $\langle \omega \rangle$ which is isomorphic to \mathbb{Z}_d .

Let x, y, x', y' be vertices of Γ such that $y = xs$ and $y' = x's'$, with $s, s' \in S$. Since ω is a complete rotation there exists an integer $i \in \mathbb{Z}_n$ such that $\omega^i(s) = s'$.

By applying Proposition 7.24 with $h = \omega^i$, we obtain an automorphism $f = t_a \omega^i \in A_h$ such that $f(x) = x'$ and $f(y) = f(xs) = x' \omega^i(s) = x's' = y'$. Furthermore f is unique, for if $y' = t_a \omega^i(y)$ and $x' = t_a \omega^i(x)$, then $t_a \omega^i(x)s' = y' = t_a \omega^i(x) \omega^i(s)$, thus $s' = \omega^i(s)$. Since ω is a complete rotation, i is unique in \mathbb{Z}_d . By Proposition 7.24, a is also unique. \square

For the hypercube $H(d)$, the subgroup of Corollary 7.26 is $(\mathbb{Z}_2)^d \rtimes \mathbb{Z}_d$. Let us notice that the butterfly graph and the cube-connected cycles graph (see for example their definitions in [Hey97]) are two Cayley graphs defined on this group. Notice also we will see later (see Proposition 7.50) that the rotation-translation group of $H(d)$ is equal to $\mathbb{Z}_2^d \rtimes \mathfrak{S}_d$.

Corollary 7.27 *Any rotational Cayley graph is arc-transitive.*

Notice that, in particular, the pancake graph, the cube-connected cycles graph and the butterfly graph are not rotational since they are not arc-transitive (see [LJD93]).

Let us recall that the edge-connectivity of a vertex-transitive graph (in particular a Cayley graph) is maximal and that the vertex-connectivity of an edge-transitive Cayley graph is equal to its degree and therefore maximal [Wat70]. By Corollary 7.27, we get the next result.

Corollary 7.28 *The vertex-connectivity of a rotational Cayley graph is maximal.*

Remark 7.29 Since K_n is arc-transitive, Proposition 7.11 shows that not every arc-transitive Cayley graph is rotational. We will also deduce from Section 7.4 that the complete transposition graph which is arc-transitive ([LJD93]) is not rotational.

By Corollary 7.20, if $\text{Cay}(G, S)$ has a complete rotation, then all generators of S have the same order in the finite group G . This condition is not sufficient to insure the existence of a complete rotation.

Remark 7.30 [Mar96] There exist non-rotational Cayley graphs $\text{Cay}(G, S)$ such that all generators of S have the same order in the group G . The *Möbius graph* (depicted on Figure 7.1) is an example of such a graph.

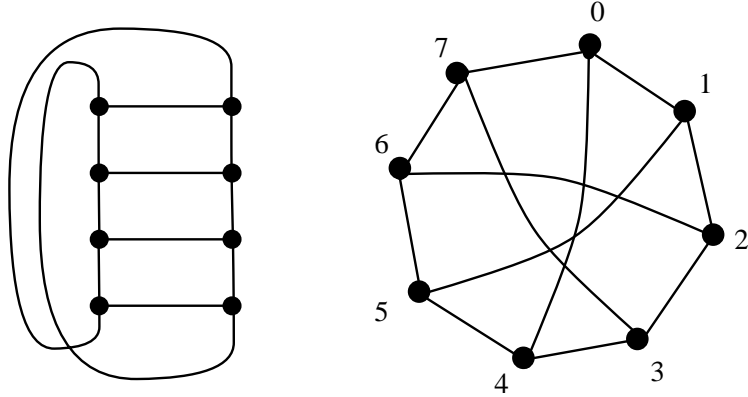


FIG. 7.1 – *Möbius graph*

The Möbius graph can be defined as the circulant Cayley graph $\text{Cay}(G, S)$ with $G = \mathbb{Z}_8$ and $S = \{-1, +1, +4\}$ ($-4 \equiv +4 \pmod{8}$). The generators are of orders

8, 8 and 2, respectively. By Corollary 7.20, we cannot find a complete rotation for this structure.

Furthermore, this graph is not arc-transitive. In fact, consider its vertices as labeled by \mathbb{Z}_8 . It is easy to verify that the edge 01 belongs to only one 4-cycle (0,1,5,4), but the edge 04 belongs to two 4-cycles (0,1,5,4) and (0,4,3,7). Thus by Corollary 7.27, this graph is not rotational.

Since the Möbius graph is isomorphic to $\text{Cay}(G', S')$ with $G' = (S' | R')$, $S' = \{x, y, z\}$ and $R' = \{xyxyz^{-1}, x^2, y^2, z^2\}$, this graph is an example of non rotational Cayley graph with all the generators of S' having the same order in G' .

7.3.4 Complete rotations on Cartesian products

The Cartesian product of two graphs Γ and Γ' , denoted by $\Gamma \square \Gamma'$, is the graph with vertex set $V\Gamma \times V\Gamma'$ and edge set $\{[(i, j), (k, j)], [i, k] \in E\Gamma\} \cup \{[(i, j), (i, l)], [j, l] \in E\Gamma'\}$.

We recall the following well known result.

Proposition 7.31 *If $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ and $\Gamma' = \text{Cay}(G', S')$, then $\Gamma \square \Gamma'$ is the Cayley graph on the group $G \times G'$ with set of generators $(S \times I) \cup (I \times S')$.*

In [FA97] the following question is settled. If Γ and Γ' are two graphs having a (complete) rotation, how about the Cartesian product $\Gamma \square \Gamma'$?

Proposition 7.32 (also found independently by D. Barth) *Let $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ be a Cayley graph with a complete rotation. Then the Cartesian product $\Gamma^n = \Gamma \square \Gamma \square \dots \square \Gamma$ also has a complete rotation with the induced Cayley structure.*

Proof. Assume ω is a complete rotation of Γ . We denote the vertices of Γ^n by $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. The nd generators of Γ^n can be ordered as

$$t_{jn+i} = (I, I, \dots, s_j, \dots, I, \dots, I)$$

(where i symbols I precede s_j), for $0 \leq i \leq n-1$ and $0 \leq j \leq d-1$.

A complete rotation ρ on Γ^n is given by

$$\rho(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (\omega(x_{n-1}), x_0, \dots, x_{n-2}).$$

Now ρ is a group homomorphism since

$$\begin{aligned}
\rho[(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})] &= \rho(x_0 y_0, x_1 y_1, \dots, x_{n-1} y_{n-1}) \\
&= (\omega(x_{n-1} y_{n-1}), x_0 y_0, \dots, x_{n-2} y_{n-2}) \\
&= (\omega(x_{n-1}) \omega(y_{n-1}), x_0 y_0, \dots, x_{n-2} y_{n-2}) = \rho(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \rho(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}).
\end{aligned}$$

Furthermore, $\rho(t_i) = t_{i+1}$ for $0 \leq i \leq dn - 1$ ($t_{nd} = t_0$). \square

Notice that one can derive the same result by using Corollary 7.18 and considering a presentation $G = (S|R)$ such that R is invariant by a cyclic permutation of S . Then one obtains a presentation $(S'|R')$ of the Cartesian product by taking n disjoint copies of this presentation $(S_1|R_1), (S_2|R_2), \dots, (S_n|R_n)$, with $S_j = \{s_i^j, 1 \leq i \leq d\}$ and $1 \leq j \leq n$. The mapping ω defined by $\omega(s_i^j) = s_i^{j+1}$ for $1 \leq j < n$ and $\omega(s_i^n) = s_{i+1}^1$ is a cyclic permutation of $S' = \cup S_j$ which is a R' -stabilizer.

Definition 7.33 A graph Γ is said to be *prime* if there exist no non-trivial graphs γ and γ' such that Γ is isomorphic to $\gamma \square \gamma'$. Two graphs Γ and Γ' are said to be *relatively prime* if there exist no non-trivial graph H , and graphs γ and γ' , such that Γ is isomorphic to $H \square \gamma$ and Γ' is isomorphic to $H \square \gamma'$.

Lemma 7.34 *If γ and γ' are two relatively prime graphs, then $\gamma \square \gamma'$ is not arc-transitive, and thus not rotational.*

Proof. Applying the result of Sabidussi ([Sab60]) to relatively prime γ and γ' , we get

$$\text{Aut}(\gamma \square \gamma') = \text{Aut}(\gamma) \times \text{Aut}(\gamma'). \quad (7.4)$$

Consider an arc $[(x, y), (x', y)]$ of $\gamma \square \gamma'$ (where $x \neq x'$ and $[x, x']$ is an arc of γ). Its image by any graph automorphism of $\gamma \square \gamma'$ is $[(h(x), g(y)), (h(x'), g(y))]$ where $h \in \text{Aut}(\gamma)$ and $g \in \text{Aut}(\gamma')$. This image will never be an arc $[(z, t), (z, t')]$ (with $t \neq t'$ and $[t, t']$ an arc in γ').

This proves that $\gamma \square \gamma'$ is not arc-transitive and by Corollary 7.27 not rotational. \square

Thus we get,

Corollary 7.35 *If Γ is a rotational Cayley graph, then there exists a prime graph γ and an integer $n \geq 1$ such that $\Gamma = \gamma^n$.*

Corollary 7.35 shows that if a Cayley graph is rotational and is a Cartesian product, then all its prime factors are isomorphic. But we do not know at the present time if these factors are rotational and even Cayley graphs. Thus we can formulate the following problem.

Problem 7.36 *If the graph $\Gamma = \gamma^n$ is rotational, is γ also*

- (i) a Cayley graph?*
- (ii) a rotational graph?*

Notice that, as far as we know, it is even not evident that if γ^n is a Cayley graph, then γ is also a Cayley graph.

7.4 Cayley graphs defined by transpositions

In this part we consider only Cayley graphs $\text{Cay}(G, S)$ where $G = \langle S \rangle$ and S is a set of transpositions on $\{1, 2, \dots, n\}$. For short we say that such a Cayley graph is *defined by transpositions*.

It involves many well studied interconnection Cayley graphs such as hypercubes, star graphs, complete transposition graphs, and modified bubble-sort graphs.

Notice that if s is a transposition, then $s = s^{-1}$.

7.4.1 Transposition graph

The transposition graph associated to a set of transpositions S is defined in [AK89] and [LJD93] as follows.

Definition 7.37 Let S be a set of transpositions of $\{1, 2, \dots, n\}$. The *transposition graph* of S , denoted by TS , is the graph with vertex set $\{1, 2, \dots, n\}$ and edges ij for all $\langle i, j \rangle \in S$.

The following table give some examples considered in [LJD93] except the generalized star graph which is defined in Section 7.4.3.

Graph	S
Hypercube $H(n)$	$\langle 2p-1, 2p \rangle, p = 1 \dots n$
Star graph $ST(n)$	$\langle 1, i \rangle, i = 2 \dots n$
Generalized star graph $GST(n, k)$	$\langle i, j \rangle, i = 1 \dots k, j = k+1 \dots n$
Bubble-sort graph $BS(n)$	$\langle i, i+1 \rangle, i = 1 \dots n-1$
Modified bubble-sort graph $MBS(n)$	$\langle n, 1 \rangle, \langle i, i+1 \rangle, i = 1 \dots n-1$
Complete transposition graph CT_n	$\langle i, j \rangle, i, j = 1 \dots n, i \neq j$

Graph	TS
$H(n)$	n vertex disjoint K_2
$ST(n)$	a star $K_{1, n-1}$
$GST(n, k)$	$K_{k, n-k}$
$BS(n)$	a Hamiltonian path
$MBS(n)$	a Hamiltonian cycle
CT_n	complete graph K_n

We recall without proof some results we will use in Section 7.4.4. The following proposition shows that a Cayley graph $Cay(\langle S \rangle, S)$ generated by transpositions is characterized by the transposition graph TS .

Proposition 7.38 [LJD93] *Let S and S' be two sets of transpositions of $\{1, 2, \dots, n\}$. If the two graphs TS and TS' are isomorphic, then the Cayley graphs $Cay(\langle S \rangle, S)$ and $Cay(\langle S' \rangle, S')$ are also isomorphic.*

The converse of Proposition 7.38 has been proved recently by C. Delorme and J. Fournier.

Proposition 7.39 [Del97, Fou97] *Let S and S' be two sets of transpositions of $\{1, 2, \dots, n\}$. If the Cayley graphs $Cay(\langle S \rangle, S)$ and $Cay(\langle S' \rangle, S')$ are isomorphic, then the two graphs TS and TS' are also isomorphic.*

Proposition 7.40 [LJD93] *If the transposition graph TS is edge-transitive, then the Cayley graph $Cay(\langle S \rangle, S)$ is arc-transitive.*

The converse of Proposition 7.40 has been proved recently by C. Delorme.

Proposition 7.41 [Del97] *If the Cayley graph $Cay(\langle S \rangle, S)$ is arc-transitive, then the transposition graph TS is edge-transitive.*

Proposition 7.42 *If TS has r , $r > 1$, connected components corresponding to the subsets $S_l, 1 \leq l \leq r$, of S , then $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$ is the Cartesian product of the r Cayley graphs $\text{Cay}(\langle S_l \rangle, S_l)$, for $1 \leq l \leq r$.*

Proof. The group $\langle S \rangle$ is isomorphic to the direct product of the subgroups $\langle S_l \rangle$, $1 \leq l \leq r$, since two permutations with disjoint supports commute. Use Proposition 7.31 to finish the proof. \square

Corollary 7.43 *If TS has r , $r > 1$, connected components and the graph $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$ has a complete rotation, then the r connected components of TS are isomorphic and $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$ is the Cartesian product of r isomorphic Cayley graphs.*

Proof. Let us assume that TS has r , $r > 1$, connected components corresponding to the subsets $S_l, 1 \leq l \leq r$. By Proposition 7.42, $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$ is the Cartesian product of the r Cayley graphs $\text{Cay}(\langle S_l \rangle, S_l)$, $1 \leq l \leq r$, generated by transpositions. Since $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$ has a complete rotation, it is arc-transitive and, by Proposition 7.41, the transposition graph TS is edge-transitive. This implies that its connected components TS_l , $1 \leq l \leq r$, are isomorphic. Thus the r Cayley graphs $\text{Cay}(\langle S_l \rangle, S_l)$, $1 \leq l \leq r$, are also isomorphic by Proposition 7.38. \square

7.4.2 Rotations of Cayley graphs generated by transpositions

In this section we study the S -stabilizers of a permutation group generated by a set S of transpositions on $\{1, 2, \dots, n\}$. We will assume that TS has *no isolated vertices* (otherwise we can consider permutations defined on a smaller set). We will show that complete rotations in Cayley graphs defined by transpositions are exactly those of Property 7.8.

Let Γ be a graph. We first recall some definitions from [HB78].

A *star* of Γ is any set of edges incident to a vertex of a graph. An automorphism f of Γ is said to be *star-preserving* if the image by f of any star of Γ is a star.

Lemma 7.44 *If h is a S -stabilizer of $\langle S \rangle$, then h induces a permutation ϕ of the edges of TS which is a star-preserving graph automorphism of the line-graph $L(TS)$.*

Proof. By definition, h is a group automorphism of $\langle S \rangle$. If we associate the edge $[i, j]$ of TS with the transposition $\langle i, j \rangle \in S$, then h induces a natural permutation

ϕ of the edges of TS . First we prove that ϕ is a graph automorphism of $L(TS)$. Note that two transpositions commute in $\langle S \rangle$ if and only if their supports are disjoint. If $Supp \sigma \cap Supp \sigma' = \emptyset$, then $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$ and $\phi(\sigma)\phi(\sigma') = \phi(\sigma')\phi(\sigma)$, thus $Supp \phi(\sigma) \cap Supp \phi(\sigma') = \emptyset$. Conversely, by applying ϕ^{-1} .

This implies that ϕ maps adjacent vertices of $L(TS)$ onto adjacent vertices of $L(TS)$.

Now we prove that ϕ maps stars onto stars (and therefore triangles onto triangles). Assume that TS contains the three edges $[i,j], [i,k], [i,l]$ and that $\phi([i,j]) = [i',j']$, $\phi([i,k]) = [i',k']$. If $\phi([i,l]) \neq [i',l']$, then ϕ being an automorphism of $L(TS)$, $\phi([i,l]) = [j',k']$. Since h is a group homomorphism of $\langle S \rangle$, $h(\langle i,j \rangle \langle i,k \rangle \langle i,l \rangle \langle i,k \rangle) = \langle i',j' \rangle \langle i',k' \rangle \langle j',k' \rangle \langle i',k' \rangle = I$. But $\langle i,k \rangle \langle i,l \rangle \langle i,k \rangle = \langle k,l \rangle$, so that $h(\langle i,j \rangle \langle i,k \rangle \langle i,l \rangle \langle i,k \rangle) = \langle i',j' \rangle h(\langle k,l \rangle)$. This implies $I = \langle i',j' \rangle h(\langle k,l \rangle)$, thus $h(\langle k,l \rangle) = \langle i',j' \rangle = h(\langle i,j \rangle)$. This is impossible, since h is bijective on $\langle S \rangle$. \square

Notice that if h is a S -stabilizer of $\langle S \rangle$, then h^{-1} is also a S -stabilizer and the induced permutation is ϕ^{-1} which is also star-preserving automorphism of $L(TS)$.

Let us recall a well-known result of Whitney on line-graphs.

Proposition 7.45 [HB78]

If Γ and Γ' are connected graphs and $f : E\Gamma \rightarrow E\Gamma'$ is a bijection, then f is induced by an isomorphism of Γ onto Γ' if and only if f and f^{-1} are star-preserving.

In fact the proof of Proposition 7.45 given in [HB78], uses only the hypothesis that Γ and Γ' have no isolated vertices and that each vertex of degree 1 is adjacent to a vertex of degree at least 2 (in other words the line graphs $L(\Gamma)$ and $L(\Gamma')$ have also no isolated vertices). Thus, we get :

Lemma 7.46 *Let S be a set of transpositions on $\{1, 2, \dots, n\}$ such that the graphs TS and $L(TS)$ have no isolated vertices. Let ϕ and its reverse ϕ^{-1} be star-preserving graph automorphisms of $L(TS)$. Then there exists a graph automorphism σ_ϕ of TS such that $\phi([i,j]) = [\sigma_\phi(i), \sigma_\phi(j)]$*

Remark 7.47 The automorphism σ_ϕ of TS induces a permutation of the vertices $\{1, \dots, n\}$ of TS also denoted by σ_ϕ .

We are now able to prove the next result.

Lemma 7.48 *Let S be a set of transpositions on $\{1, 2, \dots, n\}$ such that the graphs TS and $L(TS)$ have no isolated vertices. Then the S -stabilizers of $\langle S \rangle$ are exactly the mappings $x \rightarrow \sigma x \sigma^{-1}$, where the permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ is a graph automorphism of TS .*

Proof. Let h be a given S -stabilizer of $\langle S \rangle$. It induces a permutation ϕ of the edges of TS . By Lemma 7.44, ϕ is a star-preserving automorphism of $L(TS)$. Lemma 7.46 then shows that there exists an automorphism σ_ϕ of the vertices of TS which induces ϕ on the edges of TS (vertices of $L(TS)$). So h maps the transposition $\langle i, j \rangle$ onto $\langle \sigma_\phi(i), \sigma_\phi(j) \rangle$. As $\langle \sigma_\phi(i), \sigma_\phi(j) \rangle = \sigma_\phi \langle i, j \rangle \sigma_\phi^{-1}$, the group automorphism of $\langle S \rangle : x \rightarrow \sigma_\phi x \sigma_\phi^{-1}$ gives the same images to the generators as the S -stabilizer h does. It follows that this automorphism is indeed exactly h . \square

By lemma 7.44 we get that, if the Cayley graph Γ has a complete rotation ω , then $L(TS)$ is vertex-transitive. Indeed, the subgroup of automorphisms $\langle \omega \rangle$ induces a subgroup of automorphisms of the line-graph which acts transitively on the vertices. Thus if there is one isolated vertex in $L(TS)$ then TS is a union of isolated edges and Γ is a hypercube. We know in that case that there exists $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ such that $\omega(x) = \sigma x \sigma^{-1}$ (where ω is the complete rotation). Thus, we get

Proposition 7.49 *Let S be a set of transpositions on $\{1, 2, \dots, n\}$. The complete rotations of $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$ are exactly those of Property 7.8.*

Notice that this proposition is a partial answer to Problem 7.9.

During the writing of this article, we were advised that J. Fournier proved the following generalization of Lemma 7.48.

Proposition 7.50 [Fou97] *Let S be a set of transpositions on $\{1, 2, \dots, n\}$. If the graph TS is connected and is neither the cycle C_4 nor a complete graph, then any automorphism of $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$ which stabilizes the vertex I is induced by a group automorphism of \mathfrak{S}_n $x \rightarrow \sigma x \sigma^{-1}$, where the permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ is a graph automorphism of TS .*

Since any automorphism of $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$ can be seen as the product of a translation by an automorphism which stabilizes I , Proposition 7.50 implies that the rotation-translation group of Cayley graphs defined by transpositions turns out to be the whole automorphism group except for $MBS(4) = GST(4, 2)$ and the complete transposition graph CT_n .

7.4.3 Generalized star graphs

We now introduce a family of graphs which generalize star graphs. We consider Cayley graphs defined by transpositions of $X = \{1, \dots, n\}$ involving elements of two complementary subsets of X .

Definition 7.51 Let k and n be two integers such that $1 \leq k < n$. The *generalized star graph* $GST(n, k)$ is defined as the Cayley graph $Cay(\langle S \rangle, S)$ where S is the set of all the transpositions $\langle i, j \rangle$ of X , with $i \in \{1, \dots, k\}$ and $j \in \{k+1, \dots, n\}$.

Property 7.52 The transposition graph TS is the complete bipartite graph $K_{k, n-k}$.

In the case $k = 1$, $GST(n, 1)$ is isomorphic to the star graph $ST(n)$ and $GST(2, 1)$ to the graph K_2 . Notice that $GST(4, 2)$ (see Figure 7.6) is isomorphic to the modified bubble-sort graph $MBS(4)$ since these two graphs have the same associated transposition graph C_4 (see Proposition 7.38).

As defined in [DT92] the *arrangement graph* $A(n, k)$ is defined as the graph with vertex set the arrangements of k elements chosen out of n elements; its edges connect vertices which correspond to arrangements differing in exactly one position. It is a quotient of $GST(n, k)$ obtained by contracting in one vertex all vertices of $GST(n, k)$ which are permutations of X giving the same image for all the elements i with $1 \leq i \leq k$ (and deleting loops and multiple edges).

Proposition 7.53 For $n - k$ and k relatively prime the generalized star graph $GST(n, k)$ has a rotation.

Proof. By hypothesis, S is the set of the transpositions $\langle i, j \rangle$, for $1 \leq i \leq k$ and $k+1 \leq j \leq n$. Consider the permutation σ defined on X by

$$\sigma = (2, \dots, k, 1, k+2, k+3, \dots, n, k+1).$$

Then $\sigma^{-1} = (k, 1, 2, \dots, k-1, n, k+1, k+2, \dots, n-1)$. For $1 \leq i \leq k$ and $k+1 \leq j \leq n$, $\sigma \langle i, j \rangle \sigma^{-1} = \langle 1 + (i \bmod k), k+1 + (j - k \bmod (n - k)) \rangle$. Since $n - k$ and k are relatively prime, the permutation $\langle 1, k+1 \rangle$'s orbit under conjugation by σ is S . Using Property 7.8 we know that the graph has a complete rotation. \square

Notice that the diameter of $GST(n, k)$ is studied in [Sac97].

7.4.4 Characterization of rotational Cayley graphs defined by transpositions

We will now characterize the rotational Cayley graphs defined by transpositions by proving the following theorem.

Theorem 7.4 *The only Cayley graphs $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$ with S a set of transpositions, which have a complete rotation are*

- (i) *the modified bubble-sort graphs and the Cartesian products of isomorphic modified bubble-sort graphs,*
- (ii) *the generalized star graphs $\text{GST}(t+q, q)$ with t and q relatively prime ($t, q \geq 1$) and the Cartesian products of isomorphic generalized star graphs $\text{GST}(t+q, q)$ with t and q relatively prime.*

Notice that hypercubes are particular cases of Cartesian products of isomorphic generalized star graphs $\text{GST}(2, 1)$.

In order to prove this theorem we need several lemmas which we present now.

Let ω be a cyclic S -stabilizer of $\langle S \rangle$ and $\bar{\omega}$ the automorphism of TS given by Lemma 7.46. If $\langle i, j \rangle \in S$, then $\omega(\langle i, j \rangle) = \langle \bar{\omega}(i), \bar{\omega}(j) \rangle$. Furthermore, the cyclic subgroup, $\langle \bar{\omega} \rangle$, of automorphisms of TS generated by $\bar{\omega}$ acts transitively on the edges of TS , and thus TS is edge-transitive. We now consider the orbits defined by the action of the group $\langle \bar{\omega} \rangle$ on the vertices of TS . The following lemma of Elayne Dauber is well-known (see [Har69], page 172).

Lemma 7.54 *If a graph Γ is edge-transitive without isolated vertices, then either Γ is vertex-transitive or Γ is bipartite and Γ has two vertex orbits which form the bipartition of Γ .*

By Lemma 7.54, there exist two cases: either $\langle \bar{\omega} \rangle$ is transitive on $VT S$ and TS is vertex- and edge-transitive, or the action of $\langle \bar{\omega} \rangle$ on $VT S$ defines two orbits and TS is edge-transitive but not necessarily vertex-transitive. We now consider these two cases separately.

Lemma 7.55 *Let TS be of maximum degree at least 2. If $\langle \bar{\omega} \rangle$ acts transitively on the vertices of TS , then TS is a vertex-disjoint union of isomorphic cycles.*

Proof. Since TS is vertex-transitive every vertex of TS has the same degree and this degree is at least 2.

Let ij be any edge of TS . Since $VT S$ is the orbit of i under $\langle \bar{\omega} \rangle$, there exists an integer $\alpha > 0$ such that $j = \bar{\omega}^\alpha(i)$. For any other edge kl of TS , there exists $\beta \in \mathbb{Z}$ such that $kl = \omega^\beta(ij)$. But $\omega^\beta(ij) = \bar{\omega}^\beta(i) \bar{\omega}^\beta(j)$ and $\bar{\omega}^\beta(j) = \bar{\omega}^\beta(\bar{\omega}^\alpha(i)) = \bar{\omega}^{\beta+\alpha}(i) = \bar{\omega}^\alpha(\bar{\omega}^\beta(i))$. Thus any edge of TS is of the form $u \bar{\omega}^\alpha(u)$, $u \in VT S$. This implies that any vertex of TS is of degree at most two. Therefore TS is regular of degree 2. Thus TS is an union of cycles and these cycles are isomorphic since TS is vertex-transitive. \square

Lemma 7.56 *Let TS be of maximum degree at least 2. If the action of $\langle \bar{\omega} \rangle$ on the vertices of TS defines two orbits, then TS is a vertex disjoint union of $m \geq 1$ complete bipartite graphs isomorphic to $K_{t,q}$ ($mtq = d$) with t and q relatively prime.*

Proof. By Lemma 7.54, TS is bipartite with two independent sets Y, Z , $Y \cup Z = X$. Let $|Y| = p$, $|Z| = n - p$. For any vertex i in Y (resp. Z), the set of its image by the automorphisms of $\langle \bar{\omega} \rangle$ is Y (resp. Z). Thus any vertex of Y (resp. Z) has the same degree t (resp. q) and $d = tp = q(n - p)$. Let $i \in Y$. The stabilizer of i for $\langle \bar{\omega} \rangle$ is by definition the subgroup of automorphisms h of $\langle \bar{\omega} \rangle$ such that $h(i) = i$. As a subgroup of a cyclic group, it is also cyclic and generated by an element $\bar{\omega}^\alpha$. Since $\{\bar{\omega}^k(i), k \in \mathbb{Z}\} = Y$, $\alpha = p$. Furthermore all vertices of Y have isomorphic stabilizers.

Similarly, for any vertex j of Z , the stabilizer is generated by the element $\bar{\omega}^{n-p}$.

Let ij be any edge of TS , $i \in Y$, $j \in Z$. We will show that the connected component of i is isomorphic to $K_{t,q}$. By $\omega^{kp}(ij) = \bar{\omega}^{kp}(i) \bar{\omega}^{kp}(j) = i \bar{\omega}^{kp}(j)$ any vertex $\bar{\omega}^{kp}(j)$ is adjacent to i . On the other hand, for any edge $il, l \in Z$, the automorphism which sends the edge ij onto the edge il must belong to the stabilizer of i , so that $l = \bar{\omega}^{kp}(j)$ for some integer k . This shows that the neighborhood of i is $\{\bar{\omega}^{kp}(j), k \in \mathbb{Z}\}$. By symmetry, the neighborhood of j is $\{\bar{\omega}^{k(n-p)}(i), k \in \mathbb{Z}\}$. It remains to prove that any neighbor of i and any neighbor of j are adjacent. But, for any integers l, k , $\bar{\omega}^{l(n-p)}(i) = \bar{\omega}^{l(n-p)}(\bar{\omega}^{kp}(i)) = \bar{\omega}^{kp}(\bar{\omega}^{l(n-p)}(i))$, so that $\bar{\omega}^{l(n-p)}(i) \bar{\omega}^{kp}(j) = \omega^{kp}(\bar{\omega}^{l(n-p)}(i)j)$, and $\bar{\omega}^{l(n-p)}(i) \bar{\omega}^{kp}(j)$ is an edge of TS .

Thus TS is a disjoint vertex union of say $m \geq 1$ complete bipartite graph isomorphic to $K_{t,q}$, with $d = mtq$. It remains to prove that t and q are co-prime.

But the least common multiple of p and $n - p$ must be d , otherwise all the edges of TS could not be obtained from a given edge ij by the powers of ω as $\omega^\alpha(ij) = \bar{\omega}^\alpha(i) \bar{\omega}^\alpha(j)$. But since $d = tp = q(n - p)$, this implies that t and q are relatively prime. \square

We can summarize the results obtained so far as follows.

Corollary 7.57 *Let S be a set of transpositions such that TS has no isolated vertices. Then $Cay(G, S)$ has a complete rotation if and only if its transposition graph TS is*

- (i) *the union of vertex disjoint isomorphic cycles, or*
- (ii) *the union of vertex disjoint complete bipartite graphs isomorphic to $K_{t,q}$ for some t and q relatively prime.*

Proof. The if part is proved by Proposition 7.42, Example 7.21 and Proposition 7.32.

Assume $Cay(G, S)$ has a complete rotation. We first consider the case where TS is not connected and of maximum degree 1. By Corollary 7.43, this implies that all the connected components of TS are isomorphic to K_2 . Thus TS satisfies the condition (ii) in the particular case of vertex disjoint complete bipartite graphs $K_{1,1}$.

Now assume that the maximum degree of TS is at least 2. Either the hypothesis of Lemma 7.55 or the hypothesis of Lemma 7.56 is satisfied. In the first case, TS satisfies the condition (i) and in the second one, the condition (ii). \square

We are now able to prove the theorem.

Proof of Theorem 7.4. By Proposition 7.32, Example 7.21 and Proposition 7.53, Cartesian products of isomorphic modified bubble-sort graphs and Cartesian products of isomorphic generalized star graphs $GST(n, k)$, with $n - k$ and k relatively prime, have a complete rotation. Conversely, assume that $Cay(\langle S \rangle, S)$ has a complete rotation and S is a set of transpositions. We can assume that TS is a graph on n vertices without isolated vertex (otherwise, we replace n by $n - 1$). By Corollary 7.57, Proposition 7.42 and Example 7.21, $Cay(\langle S \rangle, S)$ is the Cartesian product of isomorphic modified bubble-sort graphs or the Cartesian product of isomorphic generalized star graphs. \square

7.5 Conclusion

In this article we have studied some Cayley graphs $Cay(G, S)$ which are interesting as models of interconnection networks, since they behave well for communication algorithms. They have particular automorphisms called rotations which are induced by automorphisms of the group G defining the structure of Cayley graph. Such a group automorphism leaves invariant the set of generators S and in

the particular case of a complete rotation cyclically permutes the generators. Not all Cayley graphs have such complete rotations and we have studied some characterizations. We have characterized the complete graphs which have a complete rotation. Our more general characterization is given in terms of representation and relators for the group and the set of generators, but this result is not easy to handle for a general graph. Nevertheless we have completely characterized Cayley graphs generated by transpositions which have a complete rotation.

We have also studied conditions for the existence of a rotation and proved that some necessary conditions are not sufficient. Conversely, we do not know if some sufficient conditions we give, like for Cartesian products, are also necessary. Thus, we have pointed some problems, the most exciting being probably the equivalence of the existence of a complete rotation ω on $\text{Cay}(G, S)$ and the existence of an inner group automorphism of G , $x \rightarrow \sigma x \sigma^{-1}$, which cyclically permutes the generators.

Acknowledgments The authors thank Dominique Barth, Charles Delorme and Gert Sabidussi for helpful discussions and references.

This work has its origin in part in discussions the authors have had at the NATO ASI on Graph Symmetry in Montreal, 1996. They also wish to express their thanks to the organizers of that meeting.

7.6 Annex: Definitions of some Cayley graphs

In this section we recall the definition of some classical Cayley graphs defined on permutation groups which are rotational (see also [FA97]).

7.6.1 Cycle

The cycle C_n is the Cayley graph on \mathfrak{S}_n and the subset of the two cycles $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ and $\langle n, n-1, \dots, 1 \rangle$. In this case a complete rotation ω is defined by $\omega(x) = \sigma x \sigma^{-1}$, where the permutation σ is given by $(n, n-1, \dots, 2, 1)$.

7.6.2 Multidimensional torus

The *multidimensional torus* TM_p^d is the Cartesian product of d cycles of length p and therefore TM_p^d is rotational by Proposition 7.32.

7.6.3 Hypercube

The hypercube $H(d)$ is the graph with vertex set $\{x_1 x_2 \dots x_d : x_i \in \{0, 1\}\}$, two vertices $x_1 x_2 \dots x_d$ and $y_1 y_2 \dots y_d$ being adjacent if and only $x_i = y_i$ for all but one i .

$H(d)$ is the Cartesian product of d complete graphs K_2 and the Cayley graph of the additive product group \mathbb{Z}_2^d generated by the d generators $\underbrace{0 \dots 0}_i 1 \underbrace{0 \dots 0}_{d-i-1}$, $0 \leq i \leq d-1$.

$H(d)$ is also the Cayley graph of the permutation group G generated by the d transpositions $\langle 2i-1, 2i \rangle$, $1 \leq i \leq d$, defined on the set of $2d$ elements $X = \{1 \dots 2d\}$ ($H(4)$ is shown in Figure 7.2 and the associated transposition graph in Figure 7.3). Indeed, each vertex $x_1 x_2 \dots x_d$, $x_i \in \{0, 1\}$, can be renamed as the permutation $(a_1, a_2, \dots, a_{2d})$ where $(a_{2i-1}, a_{2i}) = (2i-1, 2i)$ if $x_i = 0$ and $(a_{2i-1}, a_{2i}) = (2i, 2i-1)$ if $x_i = 1$.

$H(d)$ is rotational. A complete rotation ω is defined on $H(d)$ by $\omega(x) = \sigma x \sigma^{-1}$, where σ is the permutation given by $\sigma = (3, 4, \dots, 2d-1, 2d, 1, 2) = \langle 1, 3, \dots, 2d-1 \rangle \langle 2, 4, \dots, 2d \rangle$.

Thus, $\sigma^{-1} = (2d-1, 2d, 1, 2, \dots, 2d-3, 2d-2)$ and $\sigma^i \langle 1, 2 \rangle \sigma^{-i} = \langle 2i+1, 2i+2 \rangle$.

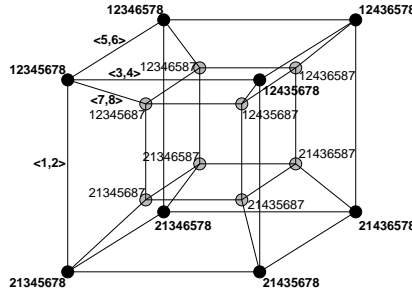


FIG. 7.2 – $H(4)$

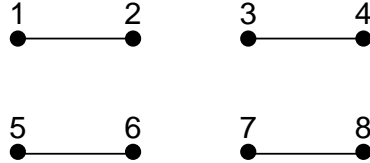


FIG. 7.3 – *Transposition graph for $H(4)$*

7.6.4 Star graph

The *star graph* $ST(n)$ is defined as the Cayley graph of the group \mathfrak{S}_n generated by the $n - 1$ transpositions $S = \{\langle 1, i \rangle, 1 < i \leq n\}$. The associated transposition graph is the star $K_{1, n-1}$ (see $ST(4)$ depicted on Figure 7.4 and the associated transposition graph depicted on Figure 7.5). A complete rotation ω is defined on $ST(n)$ by $\omega(x) = \sigma x \sigma^{-1}$, where the permutation σ is given by $\sigma = (1, 3, 4, \dots, n, 2) = \langle 2, 3, \dots, n \rangle$.

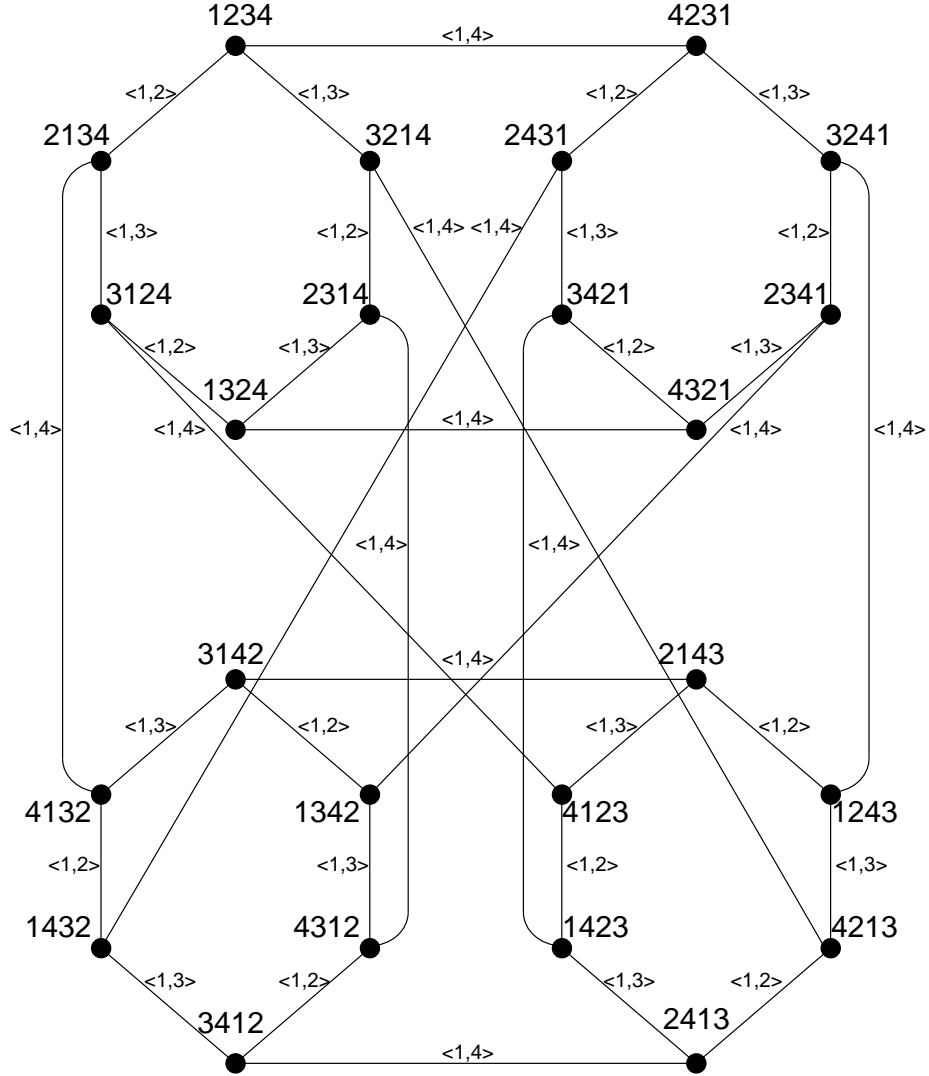


FIG. 7.4 – *Star graph* $ST(4)$.

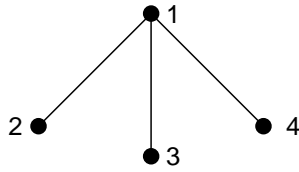


FIG. 7.5 – *Transposition graph for $ST(4)$.*

7.6.5 Generalized star graph

The *generalized star graph* $GST(n, k)$ is defined as the Cayley graph of the group \mathfrak{S}_n generated by the set of all the transpositions $\langle i, j \rangle$ of X , with $i \in \{1, \dots, k\}$ and $j \in \{k+1, \dots, n\}$. It is proved in Sections 7.4.3 and 7.4.4 that this graph is rotational if and only if k and $n - k$ are co-prime or $GST(n, k) = C_4$, the cycle.

7.6.6 Modified bubble sort graph

The *modified bubble sort graph* of dimension n , $MBS(n)$, is defined as the Cayley graph of the group \mathfrak{S}_n generated by the n transpositions $\{\langle i, i+1 \rangle, 1 \leq i < n\} \cup \{\langle n, 1 \rangle\}$. The associated transposition graph is the cycle on n vertices C_n . $MBS(n)$ has a complete rotation ω defined by $\omega(x) = \sigma x \sigma^{-1}$ where σ is the cyclic permutation given by $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$.

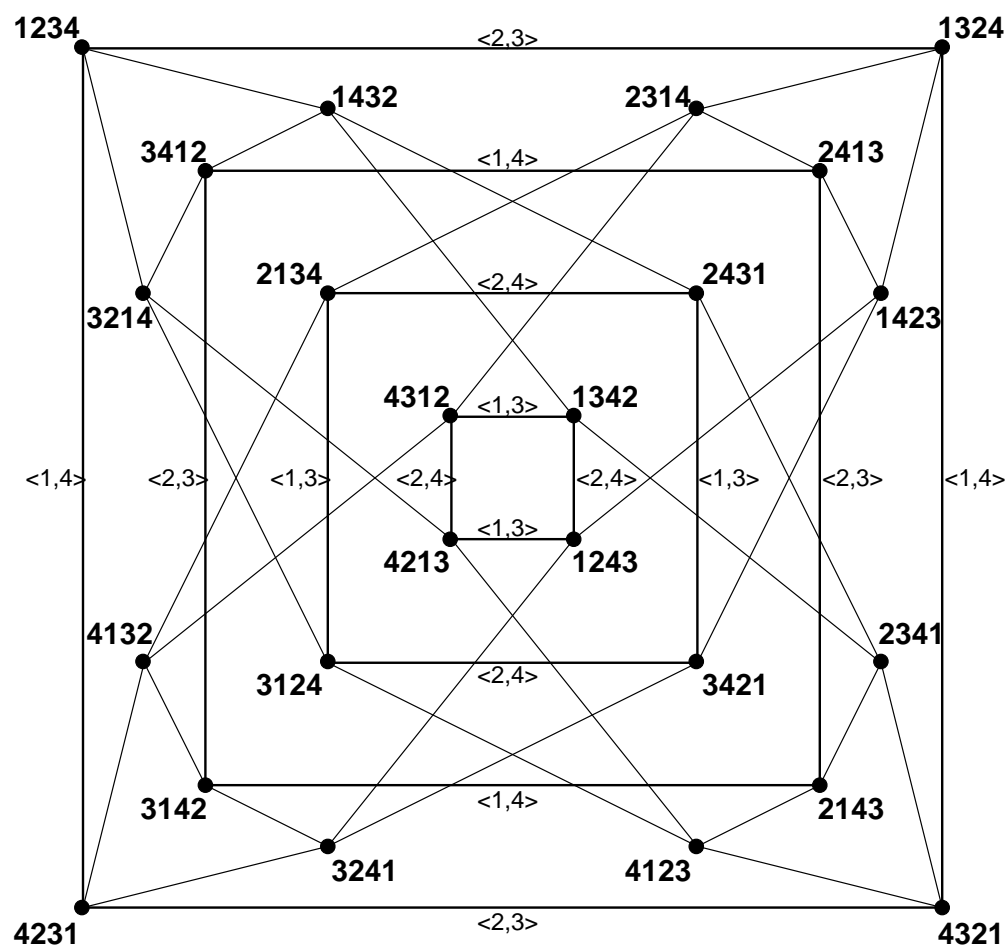


FIG. 7.6 – $GST(4,2) = MBS(4)$

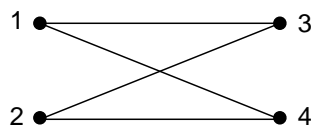


FIG. 7.7 – Transposition graph for $GST(4,2)$ and $MBS(4)$.

7.7 Annex: Notation

Γ	a graph
$V\Gamma$	its vertex set
$E\Gamma$	its edge set
$[x,y]$	an edge
$A\Gamma$	the arc set = $\{(x,y) \text{ s.t. } [x,y] \text{ is an edge}\} \subset V\Gamma \times V\Gamma$
$L(\Gamma)$	the line-graph of Γ
$Aut(\Gamma)$	the graph-automorphism group of Γ
\mathbb{Z}_n	the group of integers modulo n
G	a group
I	unit
$Aut(G)$	the automorphism group of the group G
$S \subset G$	a subset
$\langle S \rangle$	the group generated by S
$Stab(G,S)$	subgroup of $Aut(G) = \{h \in Aut(G), h(S) = S\}$
$Cay(G,S)$	the Cayley graph of the group G and the subset S
H	a subgroup of $Stab(G,S)$
\underline{H}	the induced subgroup of $Aut(Cay(G,S))$
$(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$	a permutation σ on $X = \{1, \dots, n\}$
$\sigma\tau$	$(\sigma(\tau(1)), \dots, \sigma(\tau(n)))$
\mathfrak{S}_X	the group of permutations on X
\mathfrak{S}_n	the group of permutations on $\{1 \dots n\}$
$\sigma = \langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$	the cycle (or cyclic permutation) defined by $\sigma(i_1) = i_2, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$
$\langle i, j \rangle$	transposition
$Supp \sigma$	$\{i \in X, \sigma(i) \neq i\}$

Bibliographie

- [AB93] Jean-Marie Arnaudies and José Bertin. *Groupes, algèbres et géométrie*, volume 1. Ellipses, Paris, 1993.
- [AK89] Sheldon Akers and Balakrishnan Krishnamurthy. A group theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Trans. Comput.*, 38:555–566, 1989.
- [BCH95] J.-C. Bermond, F. Comellas, and D. F. Hsu. Distributed loop computer networks: a survey. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 24:2–10, 1995.
- [Big74] Norman Biggs. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1974.
- [BKP96] Jean-Claude Bermond, Takako Kodate, and Stephane Perennes. Gossiping in Cayley graphs by packets. In *Conf. CCS95 (8 th Franco-Japanese and 4 th Franco-Chinese Conf. Combin. Comput. Sci. (Brest July 1995))*, volume 1120 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Springer Verlag, pages 301–305, 1996.
- [BW79] N.L. Biggs and A.T. White. *Permutation groups and combinatorial structures*, volume 33. London Mathematical Society, Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1979.
- [CM72] H.S.M. Coxeter and W.O. Moser. *Generators and relations for discrete groups*. Springer, New-York, 1972.
- [Dés97] Dominique Désérable. A family of Cayley graphs on the hexavalent grid. *Special issue on network communications, Discrete Appl. Math.*, 1997.
- [Del97] C. Delorme. Isomorphisms of transposition graphs, 1997.
- [DT92] Khaled Day and Anand Tripathi. Arrangements graphs : a class of generalized star graphs. *Inform. Process. Lett.*, 42:235–241, 1992.

- [FA97] Paraskevi Fragopoulou and Selim G. Akl. Spanning graphs with applications to communication on a subclass of the Cayley graph based networks. *Discrete Appl. Math.*, submitted.
- [Fou97] J. Fournier. Le groupe d'automorphismes des graphes de Cayley engendrés par des transpositions, 1997.
- [FP94] Pierre Fraigniaud and Joseph G. Peters. Minimum linear gossip graphs and maximal linear (δ, k) -gossip graphs. Technical Report TR 94-06, Simon Fraser University, 1994.
- [Fra95] Paraskevi Fragopoulou. *Communication and fault tolerance algorithms on a class of interconnection networks*. PhD thesis, Queen's University, Kingston, Canada, 1995.
- [Har69] F. Harary. *Graph Theory*. Reading, MA. Addison-Wesley, 1969.
- [HB78] R. Hemminger and L. Beineke. line graphs and line digraphs. In *Selected topics in graph theory*, pages 271 – 305. Academic Press, 1978.
- [Hey97] Marie-Claude Heydemann. Cayley graphs and interconnection networks. to appear in *Proceedings Graph Symmetry, Montreal, 1996*, NATO ASI C, 1997.
- [Joh76] D. L. Johnson. *Presentation of groups*, volume 22. London Mathematical Society, Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1976.
- [Knö75] W. Knödel. New gossips and telephones. *Discrete Mathematics*, 95(13), 1975.
- [LJD93] S. Lakshmivarahan, J. Jwo, and S. K. Dhall. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: a survey. *Parallel Comput.*, 19:361–407, 1993.
- [Mar96] Nausica Marlin. Rotations complètes dans les graphes de Cayley. *DEA, Université de Nice Sophia-Antipolis, France*, 1996.
- [Rob96] Derek J. S. Robinson. *A course in theory of groups, second edition*. Springer, 1996.
- [Sab58] Gert Sabidussi. On a class of fixed-point-free graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:800–804, 1958.
- [Sab60] Gert Sabidussi. Graph multiplication. *Math. Zeitschr.*, 72:446–457, 1960.

- [Sac97] J.-F. Saclé. Diameter of some Cayley graphs, 1997.
- [Wat70] Mark E. Watkins. Connectivity of transitive graphs. *J. Combin. Theory*, 8:23–29, 1970.
- [Wat71] Mark E. Watkins. On the action of non-abelian groups on graphs. *J. Combin. Theory*, 11:95–104, 1971.
- [Whi84] A.T. White. *Graphs, groups and surfaces*, volume 8. North Holland Mathematical Studies, Netherlands, 1984.

Conclusion et Perspectives

Nous avons étudié dans cette thèse deux problèmes liés aux communications structurées dans les réseaux. Dans une première partie, nous avons traité le problème du positionnement des chemins virtuels dans un réseau ATM, en proposant une modélisation, en recensant les résultats existant dans la littérature, puis en présentant de nouvelles analyses.

Les perspectives de recherche sont diverses. L'étude de la complexité du problème dans le cas général est un problème ouvert et de nombreuses bornes reliant le diamètre et la charge présentent encore des écarts importants. Le problème de relier la charge pour h sauts et l'indice de transmission π n'est pas réglé, en particulier dans le cas de l'instance de connexion all-to-all.

De plus, nous avons considéré des problèmes relativement réguliers puisqu'ils se posent dans des réseaux simples, avec des contraintes de capacités uniformes et des instances de communication particulières. Il serait intéressant de prolonger ces travaux en analysant le cas de graphes arbitraires, de capacités non uniformes et d'instances de communication irrégulières. En ce qui concerne les capacités, nous avons déjà étudié, dans le cycle ou dans l'arbre, le cas de capacités différentes dans un sens et dans l'autre. Pour ce qui est de l'instance de communication, nous pourrions commencer par nous intéresser à une union d'instances simples, par exemple une union d'instances de type one-to-all.

Concernant le type de graphes étudié, nous nous intéressons actuellement au cas de graphes plus complexes modélisant les réseaux existants et en particulier le réseau national de France Télécom. Dans le cadre d'un contrat avec FT R&D, nous cherchons à partitionner le réseau complexe existant en boucles en minimisant une certaine fonction de coût qui intègre en particulier l'éloignement des sites (on souhaite que les sites d'une même boucle soient relativement proches les uns des autres) et le nombre de boucles (on souhaite minimiser ce paramètre). Une fois ce partitionnement fait, nous pourrions étudier plus précisément le problème du positionnement des chemins virtuels dans les boucles modélisées par des cycles. Ce procédé provient d'une technique plus générale qui consiste à construire un réseau intermédiaire plus simple que le réseau existant (un réseau de boucles unifiées dans notre cas) et à positionner les chemins virtuels sur ce réseau intermédiaire

plus facile à manipuler.

D'autre part, notre modélisation théorique du problème simplifie la structure des réseaux ATM. Des généralisations vers des modèles plus larges seraient instructives d'un point de vue pratique. Les paramètres de coût que nous considérons (nombre de chemins virtuels traversés par une connexion pour le coût temporel et capacité des liens physiques pour le coût financier) pourraient être remplacés par une fonction de coût plus complexe que nous chercherions à optimiser.

Dans une seconde partie, nous avons abordé le problème de construire un protocole d'échange total optimal dans un réseau de processeurs. Nous avons étudié le cas où le réseau est modélisé par un graphe de Cayley et cherché dans quels cas ce graphe possède une structure particulière permettant de construire simplement un protocole d'échange total optimal. Nous avons d'abord expliqué quelle structure particulière nous recherchions et pourquoi. Nous avons ensuite caractérisé les graphes de Cayley admettant une telle structure.

Comme nous l'avons vu, pour construire un protocole d'échange total optimal dans un graphe de Cayley admettant une rotation complète, il suffit que les points fixes de la rotation ne disconnectent pas le graphe. On conjecturait que cette propriété était vraie dans la grille, mais des travaux récents montrent le contraire. Le problème de déterminer les points fixes dans un graphe général, et même celui de savoir simplement s'ils disconnectent ou non le graphe, reste ouverts. Nous avons mis en évidence certains problèmes dont le plus excitant est certainement de savoir s'il y a équivalence entre l'existence d'une rotation complète ω sur $Cay(G, S)$ et l'existence d'un automorphisme intérieur du groupe G , $x \rightarrow \sigma x \sigma^{-1}$, qui permute cycliquement les générateurs.

Comme nous en avons parlé dans le premier chapitre de la seconde partie, la notion de rotation ayant la propriété de permuter cycliquement les générateurs pourrait suffire à construire un protocole d'échange total optimal. Il serait intéressant de chercher dans quels graphes de tels automorphismes existent. Plus généralement, le problème de chercher le temps optimal d'échange total reste un problème difficile, même dans les graphes de Cayley.

Résumé

Cette thèse est divisée en deux parties. La **première partie** concerne la commutation rapide des informations dans les réseaux ATM. Dans le **chapitre 2**, nous décrivons la technologie ATM. Dans le **chapitre 3**, nous modélisons le problème du positionnement des chemins virtuels et définissons les deux paramètres étudiés, charge et nombre de sauts d'un VPL. Nous discutons l'orientation du modèle, la complexité du problème, puis proposons une synthèse des résultats de la littérature. Les démonstrations des résultats originaux se trouvent dans les **chapitres 4 et 5**.

La **seconde partie** concerne l'échange total dans les réseaux d'interconnexion entre processeurs. Dans le **chapitre 6**, nous introduisons les notions de théorie des groupes nécessaires ainsi que la motivation du problème. L'objet du **chapitre 7** est de caractériser les graphes de Cayley admettant un certain automorphisme de graphe (appelé *rotation complète*) permettant de construire d'une manière simple un protocole d'échange total optimal. Nous mettons en évidence des conditions nécessaires sur le groupe pour que le graphe admette une rotation complète. Nous donnons la liste exhaustive des graphes de Cayley admettant une rotation complète parmi les graphes de Cayley engendrés par des transpositions.

Mots clés : Communications, Réseaux ATM, Chemins virtuels, Plongements, Charge, Flots, Dimensionnement, Réseaux de processeurs, Routage, Graphes de Cayley, Echange total, Théorie des groupes

Abstract

The thesis is divided into two parts. Both problems are motivated by the study of communication networks. The **first part** deals with the Virtual Path Layout Problem. It contains an overview of the ATM technology in **chapter 2**, followed by a description of the model and a bibliographical survey in **chapter 3**. The ATM virtual layout is defined; with the values $D(G, I, c)$ (the smallest number of hops needed to connect between any pairs of vertices in I with load c), and $\pi(G, I, h)$ (the smallest capacity of a virtual path layout that connects pairs in I , using at most h hops). The properties of and the relations between these values are then studied. The directed and undirected models and the computability of the parameters are discussed. A survey is then given. Most of the analysis is discussed in **chapters 4 and 5**. Bounds on the load are first given. One main result is the lower bound shown in Theorem 4.3 on $\pi(G, I, h)$ that is shown to be tight in several cases. Bounds on the virtual diameter are then given in terms of the edge connectivity. In the last chapter, the virtual diameter is specifically studied.

The **second part** deals with Complete Rotations in Cayley Graphs. **Chapter 6** describes a previous work, that is used and extended in **chapter 7** in the study of Cayley graphs with complete rotations. This concept was defined in order to construct optimal gossip algorithms. Some properties of the graph are related with symmetries in the group and Cayley graphs defined on a group generated by transpositions admitting a complete rotation are characterised.

Keywords: Communication, ATM networks, Virtual Path Layout Problem, Load, Flows, Processor Networks, Routing, Cayley graphs, gossiping, Group Theory